Malmö högskola
Lärarutbildningen
Natur, Miljö och Samhälle

Uppsats
15 hp

Bråk och proportion –
En jämförelsestudie mellan svenska och japanska läroböcker

Fraction and proportion –

A comparative study on Swedish and Japanese textbooks

Tomoko Helmertz

Magisterkurs i utbildningsvetenskap, 30 poäng
Datum för slutseminarium 2010-06-08

Examinator: Tine Wedege
Handledare: Per-Eskil Persson

Sammanfattning

I detta arbete granskas och jämförs svenska och japanska läroböcker genom hela grundskolan med avseende på bråk- och proportionsbegrepp. Syftet är att skapa insikter om vilka skillnader det finns mellan läroböckerna som är viktiga för elevers möjligheter att bättre förstå dessa begrepp, och att ge förslag till förbättrad begreppsbildning i matematikundervisningen. Det finns skillnader mellan svenska och japanska läroböcker angående på vilka sätt ett objekt presenteras och behandlas. I svenska läroböcker sker begreppsbildning i början av ett kapitel som en sammanfattning, och genom att eleverna själva löser uppgifterna. I Japan framförs ett objekt med ett problem, och diskussioner om lösningar visas invävda med begreppsdefinitioner. Generalisering och koppling till vad som behandlats tidigare är viktiga element i japanska läroböcker.

Nyckelord: begreppsbildning, bråk, Japan, jämförelsestudie, läroböcker, matematik-undervisning, proportion, rationella tal, representationer, variationsteori

Abstract

This study analyzes and compares Swedish and Japanese mathematics textbooks through the whole compulsory schools in respect of rational numbers and proportion. The purpose is to give an insight of what important differences there are between the textbooks in order to offer pupils opportunities to acquire better conceptual understanding, and to give some suggestions for the improved conceptual understanding in the mathematics education. Various differences are found in how the textbooks treat an object between Sweden and Japan. In the Swedish textbooks, concepts of an object are presented and summarized in the beginning of a chapter, and tasks in the books play an important role in students' conceptual understanding. In Japan an object is introduced with a problem, and discussions of the solutions are interwoven with definitions of the concepts. Generalization of the concepts and making connections are essential elements in the Japanese textbooks.

Keywords: a comparative study, conceptual understanding, fraction, Japan, mathematics education, proportion, rational numbers, representations, textbooks, variation theory

Innehållsförteckning

1 Inledning

När jag publicerade mitt examensarbete 2007, fick jag ett par kommentarer angående att jämföra prestationer mellan östasiatiska och västerländska elever. De menar att asiatiska barn är födda med matematisk förmåga och det är orättvist och oväsentligt att jämföra. Det finns utbredda stereotyper om asiatiska elever och studenter: den ”smarte asiaten” och ”asiaten som lär sig utantill” (Marton & Booth 2000, s. 61) De huvudsakliga syftena med mina studier och andra jämförelsestudier är varken att hylla asiatiska elevers lyckande i matematik eller att blint ta till sig asiatiska undervisningsmetoder i Sverige/västländer. Varför jämför man elevprestationer och undervisningar? Vad är meningen med jämförelsen?

Undervisningen i ett land är ett kulturellt fenomen och inte något som man lär sig genom skolarbete (Gallimore 1996, refererad i Hiebert & Stigler 2004). Den är en del av historien och traditionen i landet, och man kan inte skilja undervisningen från landets kultur. Alltså är en undervisning en kulturell företeelse. De flesta lärare lär sig att undervisa genom att växa upp i en undervisningskultur, genom att uppleva hur lärare undervisar i sin egen skolgång och sedan använda dessa metoder som egna praktiken (Hiebert & Stigler 2004). Genom att jämföra undervisning mellan olika länder kan man få se likheter och skillnader, och mest av allt upptäcka sin egen undervisningskultur. Man kan få insikt om alternativa undervisningssätt för att förbättra undervisningen (Runesson & Mok 2005).

Efter tre års erfarenhet som matematiklärare på en högstadieskola, har jag blivit mer och mer intresserad av hur begreppsbildning fungerar under matematikundervisning i Sverige, i synnerhet bråkbegreppet. Eleverna tycker att bråk är svårt att förstå och samtidigt känner jag att vi arbetar väldigt lite med bråk i skolan. Som jag nämnde i mitt examensarbete, saknas det ofta diskussionsutrymme för begreppsförståelse under lektionerna i svenska skolan (Helmertz 2007). I detta arbete jämförs svenska matematikläroböcker med japanska i anknytning till bråkbegrepp genom den hela grundskolan ur ett variationsteoretiskt perspektiv. På det sättet får vi förhoppningsvis bättre förståelse om hur och vilka delar av bråk vi arbetar med i skolorna i båda länderna.

2 Teoretisk bakgrund

2.1 Variationsteori

Pong och Morris (2002) kritiserar att en essentiell aspekt av undervisning har försummats i diskussionerna angående läroplansreformen de senaste decennierna. Det betydelsefulla är hur lärare ska göra för att ett lärandeobjekt blir tillgängligt till eleverna, och detta ger mest betydande påverkan på inlärning hos eleverna. En undersökning av Alexandersson (1994, refererad i Pong & Moris 2002) angående lärarutbildningar visar att det är mer effektivt för lärare att fokusera på hur man hanterar lärandeobjekt för att eleverna ska kunna lära sig det, istället för att koncentrera på lärares aktiviteter under lektioner, bedömning, kursplaner eller sociala förhållande i klassen. Diskussionerna har mest varit fokus på olika undervisningsformer som ”direkt instruktionsmetod” eller ”frågemetod”, ”lärarcentrerad” eller ”elevcentrerad”. Dessa diskussioner missar tyvärr den väsentliga aspekten i undervisningen: kvaliteten hos lärarinstruktioner. Detta handlar om lärarens matematikkunskaper och hennes hantering av matematiska innehåll, och hennes uppmärksamhet på elevens tankegång och engagemang under lektionerna (Kilpatrik m.fl. 2001, refererad i Pong & Morris 2002). Denna tendens har man också kunnat se i Sverige. Matematikdidaktiska diskussioner har ofta fokuserat på olika arbetssätt och arbetsmetoder, t ex laborativa eller problemlösningsbaserade, grupparbete och enskilt arbete (Häggström 2008b). Variationsteorin riktar fokusen mer på behandling och hantering av varierande aspekter på ett matematiskt objekt i undervisningen.

Variationsteorin härstammar från konstruktivismen, speciellt individuell konstruktivism kombinerad med ett sociokulturellt perspektiv. I konstruktivismen är kunskap något som individen själv konstruerar, och lärande ses som kognitiva konstruktioner av det lärande subjektets erfarenhetsvärld (Marton & Booth 2000, Runesson 1999). Runesson har uppmärksamgjort just Marton och Booths lärandeteori och döpte den till variationsteori (1999, s.27). Inom matematikdidaktiken tillför variationsteori en struktur som möjliggör att urskilja och beskriva differentiering av hur ett matematiskt innehåll behandlas i undervisning (Häggström 2008a).

Marton och Booth (2000) förklarar fenomenografin och den fenomenografiska forskningsgrundenhet som ett sätt att *erfara* något, och centralt begrepp vad gäller lärande är vad som erfars och hur detta erfars. Vår världsuppfattning konstitueras som en intern relation mellan den yttre världen och den inre världen. Det är en enda värld som var och en av oss erfar. Eftersom vi alla är olika har vi olika världsuppfattningar. Att lära sig något betyder att erfara världen på ett annat sätt än tidigare, eller att få förmågan att erfara världen på ett annat sätt (Marton & Booth 2000).

För att kunna *erfara* något måste vi *urskilja* detta från dess omgivning (Marton & Booth 2000, Marton m.fl. 2004). För att kunna erfara färgen ”blå”, till exempel, måste man ha erfarit andra nyanser av färger. Det här är blå, inte röd eller gul eller svart. Utan andra färger, är det svårt för oss att uppfatta färgen ”blå”. En sådan betraktelse kan vara kulturell. I asiatiska länder inkluderar blågröna färger under blå-begreppet, och vi kallar ”blå” för trafikljus, däremot betraktas den aktuella färgen som grön i västerländer. Om växter växer fylligt och rikligt, säger vi i Japan att ”det växer i blå och blå.” (Wikipedia 2010) För att ett objekt ska urskiljas från och relateras till ett annat objekt och till helheten, måste man kunna uppfatta objektet på ett medvetet plan. Det är känt att eskimåer har mer än hundra uttryck för olika snötillstånd. De har behov av alla dessa uttryck och de är medvetna om att de skiljer på dessa olika snötillstånd. För att kunna urskilja det ena från det andra är det väsentligt att man erfar objekten samtidigt (Marton m.fl. 2004).

För urskiljning behöver vi *variation* (Runesson 1999). Här pratar vi inte om någon generell variation eller flera variationer i bredare mening, utan denna måste vara essentiell och kritisk för just det aktuella lärandeobjektet som eleverna ska lära sig.

> What we believed is that variation enables learners to experience the features that are critical for a particular learning as well as for the development of certain capabilities. In other words, these features must be experienced as dimensions of variation. (Marton m.fl. 2004, s.15).

För att kunna erfara variationer i ett specifikt objekt, måste vi erfara dessa dimensioner av variation samtidigt. Vi kan aldrig se en dimension av variation utan att vara medveten om andra dimensioner eller andra tidigare upplevda dimensioner av variation (Marton m.fl. 2004). Med ett annat ord beskriver Marton och Booth (2000) detta som del- och helhets perspektiv: man kan uppleva och urskilja delarna jämfört med helheten, och man måste kunna se helheten för att kunna urskilja delarna som finns i det hela. Det är väsentligt att behandla ett lärandeobjekt inte bara i delar, utan i ett helhetsperspektiv på en och samma gång. När man erfar olika dimensioner av variation i ett enda lärandeobjekt, får man urskilja dessa och bli medvetna om djupet av lärandeobjektet. Eftersom dimensioner av variation handlar om ett enda lärandeobjekt, får vi leta efter mycket subtila skillnader inom ett lärandeobjekt på mikronivå för att ge eleverna kritisk och meningsfull variation (Lo & Ko 2002).

Denna variation är något som lärare vill att eleverna erfar för att lära sig ett objekt, men vad händer om eleverna ändå inte lär sig? Vad händer om eleverna inte ser denna variation?

Lärandeobjekt kan definieras som objekt där kritisk variation kan urskiljas och erfaras av eleverna (Marton m.fl. 2004) och tre olika lärandeobjekt presenteras här: det *intentionella* lärandeobjektet, det *levda* lärandeobjektet och det *iscensatta* lärandeobjektet. Det intentionella lärandeobjektet är från lärarens synpunkt det objekt som läraren avser att eleverna ska lära sig. Detta innebär att man inte vet om eleverna verkligen lär sig eller ej. Det levda lärandeobjektet är det som eleverna faktiskt har lärt sig när lektionen är slut och även långt efter. I variationsteorin fokuserar man mest på det tredje lärandeobjektet, det iscensatta lärandeobjektet. Det är lärandeobjektet som definieras vad eleverna har möjlighet att lära sig i den aktuella undervisningen gällande den specifika lärandeobjekt (Marton m.fl. 2004). Det iscensatta lärandeobjektet anses viktigt ur forskningssynpunkt eftersom det fokuserar på kvaliteten av lärarinstruktioner. Det väsentliga är hur läraren strukturerar sina lektioner så att eleverna har möjlighet att bli medvetna om och att kunna lära sig det aktuella lärandeobjektet. Det finns ingen garanti för att eleverna lär sig vad läraren har för avsikt att de ska lära sig, med tanke på olika psykiska och sociala miljöer, men det är väsentligt att ge eleverna möjlighet att erfara olika dimensioner av variation av ett lärandeobjekt. Utan att uppleva dessa dimensioner kommer eleverna att missa chansen att lära sig de väsentliga och kraftfulla kunskaperna (Häggström 2008a).

Sammanfattningsvis kan man beskriva relationer mellan de fyra viktiga aspekter i variationsteorin. För att erövra kunskap om ett lärandeobjekt måste man kunna fokusera på de kritiska aspekterna i objektet samtidigt. För att kunna uppleva dessa samtidigt måste man kunna urskilja dessa delar i helheten. För urskiljning behöver man erfara variation. För att kunna se variation måste man ha upplevt skillnader och varit medveten om dessa skillnader samtidigt. (Marton m.fl. 2004)

2.2 Representationsförmåga

Symbolsystemet spelar en väsentlig roll i matematik och utan matematiska symboler är det omöjligt att uttrycka och kommunicera matematiska innehåll. Symbolsystemet ”är förbunden med matematikens egen natur” (Kaput 1987, citerad och översätts av Runesson 1999, s. 91) Ordet *representation* definieras som ”framställning” (Kerstin Hagland 2001, kursmaterial) och matematiska begrepp representeras på olika sätt i undervisningssammanhang. Enligt Duval (2006) är representationer ”kan utgöras av individens föreställningar, uppfattningar eller missuppfattningar, till vilka man bara kan få tillgång till genom att denne uttrycker dem, verbalt, skriftligt eller på annat sätt” (s. 89). Det finns olika modeller av representationssystem. Lesh m.fl. (1987) har delat matematiska representationsformer i fem kategorier: bildlig, muntlig, skriftlig, konkret representation och representation med manipulativa hjälpmedel. Hagland m.fl. (2005) använder fyra kategorier: konkret, grafisk/geometrisk, aritmetisk/algebraisk och logisk representation. Duval (2006) menar däremot representationer som naturligt språk (talat och skrivet), uttryck med formella matematiska tecken (numeriska, algebraiska och andra), formella matematiska diagram (inom koordinatsystem, statistiska diagram m.m.), tabeller och andra schematiska uppställningar. Samtidigt inkluderar Duval (2006) flera representationsformer som icke-formella bilder och skisser samt pilar, linjer, inringningar och andra hjälprepresentationer. Representationsförmåga innebär en förmåga att förstå och uttrycka matematik på olika representationsområden som dessa modeller visar (Behr m.fl. 1992, Brenner m.fl. 1999). Elever i skolan börjar lära sig matematik på mer konkreta och vardagsnära sätt med enkla symboler, men så småningom ska de lära sig mer komplicerade symboler och kunna uttrycka sig på mer avancerat sätt. När man har en högre representationsförmåga, kan man till exempel uttrycka sina idéer på ett mer verbalt och symboliskt sätt än med t ex ett konkret material. Flexibilitet är också en viktig aspekt i representationsförmåga (Brenner m.fl.1999, Runesson 1999, Hagland m.fl. 2005). Man ska kunna utnyttja olika representationsformer och kombinera dessa för att lösa ett problem, och/eller också kan man redovisa en lösning som är komponerad i flera representationsområden. För att eleverna ska kunna använda sig av olika representationsformer, är det viktigt att de har möjlighet att arbeta med dessa under lektionerna genom hela skoltiden.

2.3 Rationella tal – bråkbegrepp och proportionsbegrepp

Begreppet ”rationella tal” har utvecklats för att tillfredsställa behov av människan. Rationella tal behövs för att beskriva och kontrollera del-hel relationer; de är nödvändiga för att kunna mäta, dela och jämföra fortlöpande kvantitet som volym, vikt, växelkurs mm. Däremot är det en allmän uppfattning att det rationella tal-tänkandet inte är en för människan naturlig tänkeprocess (Pitkethly & Hunting 1996). Inom skolmatematiken är det allmänt känt att eleverna tycker bråk är svårt att förstå, och att bråk är ett av de största hindren för elever på mellan- och högstadiet i grundskolan, och även senare i högre studier. Samtidigt är bråk är ett viktigt begrepp för att elever sedan förstår andra begrepp som exempelvis förhållande, proportion, geometri och bokstavsräkningen/algebra (Saxe m.fl. 2005, Adjiage & Pluvinage 2007, Lamon 2007). Bråk- och proportionsbegrepp är de svåraste objekten att undervisa i, det mest matematiskt komplicerad, det mest kognitivt utmanande och det mest essentiellt för att lyckats i högre matematik och naturvetenskap (Lamon 2007). Prediger (2008) förklarar bråktalens komplexitet genom sex olika aspekter om bråktal som skiljer från naturliga tal. Till exempel, med naturliga tal kan man besvara frågan ”hur många?”, men med bråk tal kan man beskriva många saker som delar i det hela, kvot, proportion mm. I naturliga tal ökar/minskar talen i ordning, men i bråktalens ordning finns det ingen klar sekvensregel och det finns oändligt många tal mellan två bråktal. Med de fyra räknesätten kan man inte applicera reglerna i naturliga tal till bråktalsberäkning.

Behr m.fl. (1992) diskuterar begreppet ”rationella tal” med hjälp av tidigare forskningar och det sammanfattas som del-hel relation, kvot, proportion, operation, storheter och decimaltal. Bråk kan stå för många saker, t ex ett tal, del av en hel, del av ett antal, andel, förhållande, proportion, sannolikhet, skala” (Kerstin Hagland, e-post korrespondens 2009-10-20). Utifrån min egen erfarenhet tränar eleverna i Japan, parallellt med bråkräkning med de fyra räknesätten, talens delbarhet och primtal (förkortning och förlängning). Bråk kommer sedan att användas som proportioner, som behandlas mycket på högstadiet. Proportionsbegrepp används flitigt i geometri, t ex likheter och skala. Förståelse av talens delbarhet leder till att eleverna förstår faktorisering av algebraiska uttryck bättre. Sammanfattningsvis menar Carpenter m.fl. (1993) att det är erkänt att rationella tal inte är ett enkelt begrepp utan en serie av skilda underkonstruktioner som har samband med varandra. För underkonstruktionerna ska de rationella talen vara användbara i verkliga situationer (Freudenthal 1983, refererad i Lamon 2007) De mest distinkta underkonstruktionerna till rationella tal är mått, kvot, proportion och operation (Kieren 1993) och det finns skilda åsikter bland forskarna om del-hel aspekt ska ingå i underkonstruktionen ”*mått”* eller ska vara en enskild underkonstruktion (Lamon 2007).

Begreppet rationella tal skiljer sig från bråkbegreppet enligt Lamon (2007), även om ”bråk” är vanligaste begreppet som vi använder i Sverige. Rationella tal har en proportionell egenskap i sig: kvantiteten är lika för olika bråktal när man multiplicerar både nämnaren och täljaren med samma tal, t ex värdet på $\frac{2}{3}$ är precis lika som $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, eller $\frac{50}{75}$ (Lamon 2007). I Sverige används proportion som synonym till förhållande, som definieras som ”relation uttryckt som ett bråk” mellan två eller flera storhet (Kiselman & Mouwitz 2008, s.57). Traditionellt skrivs förhållande i bråk med kolon som 2 : 3, och läses som ”två till tre”. Proportionalitet definieras som ”samband sådant att kvot mellan storheterna är konstant” (Kiselman & Mouwitz 2008, s. 98), alltså $k = y/x$ i en linjär proportion $y = k\ x$. Konstanten kan användas i olika verkliga situationer, t ex i skala på en karta, i förstoring/förminskning av bild, i procentform som moms eller räntesats. och i sannolikhet (Lamon 2007).

Behr m.fl.(1992) pekar på att en ensidig undervisning och kritiska brister i undervisningen i rationella tal jämfört med undervisning där de naturliga talen behandlas utifrån betydligt fler olika aspekter. Enligt andra forskare (Post m.fl., refererad i Runesson 1999) befaras det att rationella tal i undervisningen behandlas mer för att lära sig procedurer med bråkräkning än för begreppslig förståelse.

3 Internationella jämförelsestudier

3.1 Elevers prestation och undervisningspraktik

Elever i östasiatiska länder har genom åren visat sin höga förmåga inom matematik och har alltid legat i topp angående deras matematik kunskaper i olika internationella undersökningar som TIMSS och PISA förutom vissa undantag (Brenner m.fl. 1999, Hiebert & Stigler 2000, Leung 2001, Häggström 2008a). Sedan slutet av 1990-talet har många västerländska forskare sökt orsakerna för östasiatiska elevers framgångar inom matematiken, och upptäckt tydliga skillnader i undervisning mellan de östasiatiska länderna och västländerna. Speciellt har forskarna uppmärksammat några ansenliga aspekter inom matematikundervisning i östasiatiska länder.

Ma (1999) har undersökt och analyserat matematikundervisningar mellan USA och Kina. Hon hittade fundamentala skillnader både inom lärarnas matematikkunskaper och mellan deras undervisningssätt. Kinesiska lärare hade övervägande högre matematikkunskaper än de amerikanska kollegorna, och de undervisade i ett djupare och på ett grundligare sätt. De amerikanska lärarna däremot fokuserade mest på procedurer om hur man räknar angivna uppgifter. Det mest intressanta att nämna från Mas undersökning är att några kinesiska lärare som intervjuades betraktade matematik som kunskaper i ett ”paket” som man inte får dela i små delar. Även om man undervisar en liten del i matematiken, kan man inte behandla den som en isolerad del utan man ska vara medveten om den lilla delens relation till helheten av matematik. Ma (1999) ritar upp ett ”kunskapspaket” som liknar ett spindelnät där alla kunskapsdelarna är sammankopplade.

Undersökningarna visar tydliga skillnader i undervisning mellan olika länder, och man kan generalisera ”typiska” japanska, amerikanska och svenska lektioner enligt dessa undersökningar. I Japan presenterar läraren i början av lektionen ”dagens problem” som är tillräckligt komplicerat så att eleverna kan arbeta i en hel lektionstid. Först jobbar eleverna enskilt, sedan i en grupp. Grupperna presenterar sina lösningar och idéer framför klassen, och jämför dessa tillsammans. Både lärare och elever kommenterar fördelar och nackdelar av olika lösningar. Till sist summerar läraren dagens arbete och ger kommentarer om de mest kraftfulla idéerna som kommit upp under lektionen. (Runesson & Marton 2002, Runesson & Mok 2004). Denna lektionsbild i Japan stämmer väl överens med vad jag såg under min observation för mitt examensarbete (Helmertz 2007) och den japanska undervisningen verkar ha mest fokus på begreppsförståelse (Runesson 1999, Häggström 2008a). I en typisk amerikansk lektion börjar läraren att presentera definitioner och/eller lösningsmetoder för att lösa en typ av problem. Efter lärarens presentation, får eleverna många uppgifter med likadana problem för att träna på. När eleverna är färdiga, går läraren vidare med ett nytt problem med presentation och lösningsmetoder. Man kan säga att den amerikanska undervisningen har mer fokus på övning på lösningsprocedurer (Häggström 2008a). I en svensk matematikundervisning är ett enskilt arbete vanligt under lektionstid och eleverna arbetar med olika uppgifter i läroboken i egen takt, och aritmetisk beräkning dominerar under lektionerna på bekostnad av begreppsförståelse (Liljestrand & Runesson, refererad i Runesson & Mok 2005).

Några forskare har gjort internationella jämförelsestudier med hänsyn till variations-teorin. De kom fram till att det fanns några tydliga skillnader mellan östasiatiska länder och västerländer. Matematikundervisning i östasiatiska länder fokuserar mer på variation av ett matematiskt objekt och lyfter upp olika aspekter att jämföra olika dimensioner av variation av ett enda objekt (Runesson 1999, Runesson & Mok 2005, Häggström 2008a). Runesson och Mok (2005) gjorde en undersökning där ett likadant matematiskt objekt undervisades både i Sverige och i Hong Kong. Resultatet visar att svenska elever får en undervisning där det ges en bredare variation med olika karaktär, medan elever från Hong Kong kan få erfara olika dimensioner av variation som har samband med varandra, och de får uppleva dessa samtidigt. Eleverna i Hong Kong har chanser att fundera på olika aspekter av ett objekt och att uppmärksamgöra samband mellan de kritiska aspekterna. Djupgående diskussioner under lektionerna beträffande det matematiska innehåll som just då behandlas verkar en väsentlig del i matematikundervisningen i östasiatiska länder (Ma 1999).

Undersökningar som gjordes för att jämföra elevers representationsförmåga i olika länder visar att östasiatiska elever överlag har högre kompetens än amerikanska elever med vissa undantag (Brenner m.fl. 1999). Mayer m.fl. (1995) gjorde läroboksanalys mellan japanska och amerikanska läroböcker, och upptäckte att japanska läroböcker betonar koordination av multipla representationer, och integrerar verbala, visuella och symboliska representationer mer än den amerikanska motsvarigheten. Östasiatiska elever vistas betydligt mer i lektioner där multipla representationer behandlas än amerikanska elever normalt gör (Brenner m.fl. 1999).

3.2 Läroboksgranskning

Det senaste decenniet har läroböcker, som är en viktig källa för att visa vilka matematiska objekt behandlas i undervisning i ett land, fått betydligt mer uppmärksamhet bland internationella forskare inom matematikdidaktik. TIMSS analyserade läroböcker och andra material från ca 50 länder, och ICME-10 (the Third International Mathematics and Science Education) organiserade för första gången en grupp som fokuserade endast på läroböcker 2004 (Fan & Zhu 2007). Med tanken på att eleverna i stor utsträckning använder läroböcker under lektionerna i skolan och att lärare är delvis beroende av läroböcker i vardagliga lektioner för vad och hur de ska lära ut, är det rimligt att påstå att läroböcker spelar en viktig och inflytande roll i matematikundervisningen (Pepin 2008, Pepin & Haggarty 2008). Det finns delade meningar bland forskare angående betydelsen av läroböcker inom undervisningen, men man kan enas om att läroböcker ger ett trovärdigt och rimligt tillfälle att lära matematik (Valverde m.fl., refererade i Delaney m.fl. 2007). Även om läroböcker innehåller de intentionella lärandeobjekten, inte de levda objekten, ger läroboksgranskning mellan olika länder en viktig inblick på vilka matematiska innehåll och metoder erbjuds i skolan i dessa länder.

Forskningsmetoder inom läroboksgranskning varierar beroende av vilka syften en forskning har. Vissa har undersökt läroböcker som helhet som t ex utseende och organisation av innehåll, vilket kallas en horisontal analys. Andra har undersökt ett enda matematiskt begrepp på en djupare nivå för att illustrera substantiella skillnader för elevers inlärning. Detta kallas en vertikal analys av läroböcker (Delaney m.fl. 2007). Båda analysmetoder har blivit kritiserade, och metoden som kombinerad både horisontal och vertikal analys är mer önskevärd och lönande. Men hittills saknas en sammanhängande och användbar metod som möjliggör systematisk finkornig analys av läroböcker (Delaney m.fl. 2007). Enligt studierna som hittills gjorts finns det avsevärda skillnader mellan läroböcker från olika länder, både som helhet och på mikronivå. Dessa skillnader gäller inte bara för jämförelsestudier bland olika världsdelar utan också för forskning inom europeiska länderna (Delaney m.fl. 2007).

Winsløw (2004) visar, i sin filosofiska analys angående den japanska matematik-undervisningen, hur en japansk lärobok presenterar och förklarar andragradsekvation jämfört med en dansk lärobok. Den japanska läroboken använder sig av ett induktivt tillvägagångssätt, där det börjar med ett praktiskt (dock uppenbarligen konstruerat) problem. Boken bygger upp lösningsmetoder ur det praktiska problemet genom att utnyttja kunskaper som eleverna fått tidigare. Varje steg av en lösning förklaras i detalj. Först i slutet av delavsnittet ges generella regler eller formler efter en bevisföring, vilket utvecklats av det problem som presenterats i början av avsnittet. Den danska läroboken däremot, börjar med begreppsdefinitioner följd av generella regler och formler utan att föra bevis på hur de generella reglerna framkommer. Boken söker inte mer än procedurell förståelse om andragradsekvation. Tillvägagångssättet i den danska läroboken kritiseras då det påminner om dataanvändning: eleverna kan åtminstone lära sig att applicera en färdig formel utan att man begär deras strukturella förståelse om formeln (Winsløw 2004).

Andra forskare jämförde läroböcker mellan USA och Korea angående multiplikation och division av bråk (Son 2005, Son & Senk 2010). Enligt undersökningarna ger undervisning i båda länderna tillfällen att elever få begreppslig förståelse och procedurell färdighet i beräkningar. Men i USA behandlas begreppslig förståelse first och procedurell färdighetsträning följer efter, medan i Korea utvecklas dessa samtidigt med betydligt flera lektionstimmar än USA. Problem som kräver begreppsförståelse och som lösas på många steg är vanligare i Korea än i USA, likaså större lösningsvariation i Korea.

4 Syfte och frågeställningar

Hittills har en internationell läroboksgranskning med avseende på rationella tal inte utförts tidigare i Sverige. Det skulle vara intressant att undersöka hur bråk- och proportionsbegrepp, som tycks vara två av de svåraste matematiska objekten inom grundläggande matematik, behandlas i svenska läroböcker jämfört med motsvarigheterna i andra länder. Syften av min undersökning är att få bättre uppfattning av hur läroböcker hanterar bråk- och proportions-begrepp i hela grundskolan i Sverige jämfört med japanska läroböcker, och att skapa insikter om vilka skillnader det finns mellan läroböckerna som är viktiga för elevers möjligheter att bättre förstå dessa begrepp. Forskningsfrågor som jag i detta arbete ska besvara är:

- Hur hanterar och utvecklar svenskt respektive japanska läroböcker bråk- och proportionsbegreppen genom grundskolan?
- Vilken variation av bråk- och proportionsbegreppen erbjuder dessa läroböcker för att elever ska ha möjlighet att uppleva olika egenskaper hos dem och att förstå sambandet mellan olika aspekter av begreppen, givet med olika representationsformer?

Förhoppningsvis kommer detta arbete att ge en annan synvinkel och att bidra till att förbättra undervisningen i bråkräkning och proportionalitet i närmaste framtiden.

5 Metod

5.1 Analysmetod

I detta arbete används enbart läroboksgranskning som undersökningsmetod. För att kunna analysera läroböckerna systematiskt har jag utgått från metoder som Delaney m.fl.(2007) presenterar, nämligen en kombinerad metod med horisontal och vertikal analys (se 3.2), samt en liknande lista på dimensioner av variation, som Andreasson och Palm (2010) tänkte ut i sitt examensarbete.

Först presenterar jag kort något om skolsystemen i Japan. Sedan ger jag övergripande information om hur respektive läroböcker ser ut som sidoantal, bilder, antal uppgifter mm. Jag räknar antal uppgifter som är rena övningsuppgifter och exkluderar de uppgifter som används för exempel eller för att visa modellövningar. Uppgiftstyperna kan vara vanliga uträkningar, textuppgifter, repetitionsuppgifter, problemlösningar, laborationer, diskussionsuppgifter och uppgifter till grupparbete. Sedan går jag igenom de svenska och japanska läroböckerna i hela grundskolan och gör en lista på vilka matematiska objekt som berör bråk och proportion läroböckerna behandlar i varje årskurs. Denna lista finns i bilaga 2. På det sättet får man en övergripande översikt över vilket matematiskt objekt läroboken behandlar vid vilken årskurs och hur den kronologiska ordningen är i båda länderna.

Efter det arbetar jag fram en lista med ”dimensioner av variation” av bråk- och proportionsbegrepp (bilaga 3) för att kunna systematiskt kontrollera vilka dimensioner av variation läroböckerna behandlar. För att hitta så många dimensioner som möjligt har jag gått igenom olika litteraturer som belyser dessa begrepp, t ex Behr m.fl. (1992), Lamon (2007), Carpenter m.fl. (1980), Kiselman & Mouwitz (2008) och många fler. Min undersökning handlar om ett mycket stort område där man kan hitta enorm variation av inlärningsobjekt inom bråk och proportion. Därför har jag delat upp bråk och proportion i fyra kategorier enligt dess egenskaper: presentation av bråkbegrepp, bråk med räkneoperationer, tillämpning av bråk, och proportionsbegrepp. Den första kategorin ”presentation av bråkbegrepp” handlar om hur läroboken presenterar det initiala bråkbegreppet för att eleverna skall förstå vad ett bråk innebär, samt olika egenskaper av bråktal. Här ingår också relationer mellan bråktal och heltal/decimaltal/procent. Inom ”bråk med räkneoperationer” behandlas de fyra räknesätten av bråktal och olika problem kring bråkräkning. I ”tillämpning av bråk” ingår bråk och tid, bråk i geometri, förkortning/förlängning av bråktal och sannolikhet. Den fjärde kategorin ”proportionsbegrepp” behandlar olika matematiska objekt som kräver förståelse av proportions-begrepp, t ex talmönster, skala och proportionalitet. När listan är färdig, går jag sedan igenom läroböckerna, bockar av vilka dimensioner en lärobok behandlar. Resultaten med några konkreta exempel som visar variation av ett matematiskt objekt presenteras sedan. Samtidigt undersöker jag vilka representationer läroböcker använder för att förklara olika objekt. Till sist presenteras likheter och skillnader mellan svenska respektive japanska läroböcker.

5.2 **Urval**

Jag är väl medveten om det blir ett enormt område som behandlas i denna undersökning. Anledning att jag analyserar läroböcker i hela grundskolan är att jag är mest intresserad av hur den svenska respektive den japanska skolan behandlar ett matematiskt begrepp, bråk, och utvecklar begreppet långsiktigt. Då antar jag att man kan se om läroböckerna erbjuder eleverna möjligheter att förstå att en liten del av matematiken har koppling med andra begrepp och att olika begrepp i olika områden faktiskt är beroende på varandra.

5.2.1 Svenska läroböcker

Först hade jag tanken på att använda mig av läroböcker från ett och samma förlag för att man skulle kunna hitta ”den röda tråden” genom hela grundskolan. Jag kontaktade olika förlag, letade på olika bibliotek och pratade med mina kolleger, men det var tyvärr inte så lätt som jag trodde att få tag i böckerna från hela grundskolan. Jag fick istället nöja mig med att låna läroböckerna som en grundskola i sydvästra Skåne använder från år 1 till år 9. Dessa är inte från ett och samma förlag, men dessa böcker används av eleverna i en verklig skola och de faktiskt lär sig matematik med dessa böcker: *Tänk och Räkna 1-3* (*a* och *b*) för år 1-3, *Matematikboken 4 – 6* för år 4-6 och *Matematikboken X, Y(Röd) & Z (Röd)* för år 7-9.

Tänk och Räkna är uppdelad i två böcker för en årskurs, och a-boken avsätts för höstterminen och b-boken för vårterminen. Böckerna som används på år 8 och 9 (så kallade *Y- och Z-boken*) har två variationer: grön och röd. Upplägget är likadana, men grön anses för elever som vill arbeta med grundläggande matematik och röd är för elever som vill arbeta med svårare matematiskt innehåll. I denna undersökning använder jag endast röd-böcker för *Y* och *Z*. Röd-böckerna behandlar flera svårare matematiska objekt än grön-böckerna, vilket betyder att de kan innehålla flera dimensioner av variation. Läxhäften till *Tänk och Räkna* och läxuppgifter i slutet av varje *Matematikboken* utesluts helt från denna undersökning.

5.2.2 Japanska läroböcker

Jag valde läroböcker som används i alla grundskolor i en kommun, Akita, Japan. Akita ligger i norra delen av Japan och har ca 325 000 invånare (Akita kommun 2010) Urvalet av staden beror på att jag är därifrån och har lättare att ta tag i böckerna. Det finns ingen nivågruppering i boken och alla elever ska arbeta med samma bok. Upp till år 6 används två böcker för varje årskurs: den ena avsätts för den första terminen och den andra för den andra terminen. Böckerna som jag använder är: *Shougaku Sansuu 1 – 6* (a och *b*) för år 1-6 och *Chuugaku Suugaku 1 – 3* för år 7-9.

5.3 **Begränsning och reliabilitet av arbetet**

Jag är väl medveten om att sociala aspekter mellan lärare och elever och/eller elever sinsemellan är en väsentlig del i variationsteorin. En av de viktigaste aspekterna för elevers inlärning är hur en enskild lärare presenterar och leder en diskussion om ett matematiskt objekt under lektionen. Denna sociala aspekt utesluts tyvärr helt i detta arbete på grund av att min undersökning begränsas till ren litteraturgranskning. Det innebär att jag kommer att analysera olika lärandeobjekt som undervisas bokstavligen enligt läroboken, vilket inte överensstämmer med verkligheten.

Jag är också medveten om att urvalet av läroböckerna kan påverka resultatet av denna undersökning. För japanska läroböcker har tillgängligheten avgjort mitt urval, men japanska läroböcker styrs strikt enligt styrdokumenten och läroplanerna vad gäller vilka matematiska objekt som ska behandlas i varje årskurs, och kultur- och skolministeriet måste godkänna läroböckerna före publicering. Man kan därför påstå att de matematiska objekt som behandlas i varje årskurs är likadana oavsett vilka läroboksserier man väljer i Japan. Man antar dock att tillvägagångssättet på vilket en lärobok presenterar och diskuterar ett objekt skiljer sig från lärobok till lärobok. Gällande svenska motsvarigheten, finns det många läroböcker att välja på och några läroböcker som jag hittills använt i min yrkesverksamhet har olika egenskaper och upplägg med lite annorlunda matematiska objekt. På grund av tidsbrist har jag inte möjligheter att undersöka flera läroböcker i detta arbete.

Jag vill tillägga att min bakgrund också påverkat reliabiliteten i arbetet. Jag har själv gått i den japanska skolan i 12 år och lärt mig språket och matematikens grund där. Jag har varit bosatt i Sverige i drygt 12 år, tagit lärarexamen och arbetat som högstadielärare i fyra år. Med min kunskap om både språk och undervisning i de båda ländernas skolor, har jag bra förutsättningar för att kunna analysera läroböckerna. Samtidigt kan min bakgrund påverka min undersökning på ett negativt sätt eftersom min bakgrund kan ha gett mig en förutfattad inställning om hur svensk respektive japansk undervisning ser ut.

6 Resultat

6.1 **Allmän information om skolsystem och läroböcker**

6.1.1 Skolsystem och matematikundervisning i Japan

I Japan börjar skolår i den 1:a april och slutar den 31:e mars. Elever som har fyllt 6 år före skolstarten börjar första klass. Det är mycket ovanligt att gå om klassen i Japan om man inte är borta från skolan i mycket längre tid t ex på grund av sjukdom. Det innebär att de flesta eleverna avslutar den nioåriga obligatoriska grundskolan vid 15 års ålder oavsett var deras kunskaper ligger jämfört med kursplanen. Lovdagar är mycket färre än i Sverige, men enligt min tidigare undersökning har eleverna i högstadieskolan ungefär lika många matematiklektionstimmar som eleverna i Sverige (Helmertz 2007). Styrdokumenten i Japan beskriver vilka matematiska objekt ska behandlas i vilken årskurs och som jag förstått följer de flesta läroböcker exakt kursplanerna. Alla läroböcker som eleverna använder i skolan får de behålla. Detta innebär att eleverna får fylla i eller rita in i läroböcker, och många läroböcker är gjorda för att eleverna ska skriva in i böckerna.

I skolorna i Japan har ämneslärare regelbundna konferenser där planering och ämnesdidaktik diskuteras, och alla lärare i en skola har en gemensam planering för lektionerna. Högstadieskolan som jag undersökte 2006 hade utvecklats en ”stencil-metod”, där ett kapitel i boken delas i 6-8 avsnitt som 6-8 stenciler. En stencil motsvarar en lektions planering, som innehåller dagens mål, dagens uppgift, 2-3 övningsuppgifter, anvisning till extra uppgifter i läro- eller övningsboken, och utvärdering. Fokusen finns på ”dagens uppgift”, som eleverna först arbetar enskilt med och sedan redovisar och diskuterar lösningar i helklass (Helmertz 2007).

6.1.2 Svenska läroböcker

Läroböcker upp till år 3 har mängder av tecknade bilder, som spelar en mycket viktig roll i denna serie böcker för elevers förståelse i matematiska begrepp. Det finns många olika typer av uppgifter: att måla, rita eller hitta på en räknesaga, pussel och sammanhängande textuppgifter förutom vanliga beräkningsuppgifter. Begreppsförklaringar är minimala. Eleverna arbetar med 12 kapitel i en årskurs och det finns några matematikspel i slutet av varje bok.

Läroböcker från och med år 4 har likadana upplägg upp till år 9-boken. En bok är uppdelad i 6 kapitel och ett kapitel är uppdelat i 3 till 5 avsnitt. I slutet av varje kapitel finns det huvudräknings-, diskussions-, repetitions-, fördjupnings-, tema-, och problemlösningsuppgifter. Varje avsnitt börjar med en begreppsdefinition eller en presentation av beräkningsteknik med räkneexempel i en till två sidor. Sedan finns det beräkningsuppgifter som är uppdelade i A, B och C enligt svårighetsgrader. Uppgifterna är oberoende av varandra och inte sammanhängande, så eleverna kan hoppa över vissa uppgifter utan problem. Man kan se att författarnas avsikt är att göra uppgifter verklighetsförankrade, och boken upp till år 7 har de flesta textuppgifterna anknytning till elevernas vardag eller till verkligheten.

Böckerna använder många tecknade bilder (i mellanstadiet) och foton (i högstadiet) i färg, fast böckerna för år 8 och år 9 innehåller betydligt färre bilder. Det är möjligt att de nya upplagorna av de böckerna innehåller fler bilder, eftersom år 7-boken som är en nyare upplaga har flera bilder som används för att presentera uppgifter. Annars har de flesta foton i hög-stadieböckerna inget samband med det matematiska innehållet i uppgifterna. Om en uppgift handlar om antal elever till exempel, finns det en bild på många ungdomar, och om en uppgift är om bilresa på landet så finns det en bild på ett landskap.

Gällande antal sidor och uppgifter, har jag sammanställt en tabell (bilaga1). Böckerna har olika sätt att sortera och lägga upp uppgifter och olika numreringsmetoder, vilket innebär att man bör tolka resultatet i *tabell 1* med försiktighet. Till exempel har böckerna upp till år 3 inga numreringar på uppgifterna, så jag räknade antal ”grupper” av uppgifter enligt uppgifternas egenskaper eller/och kolumner. Bortsett från olika numreringsmetoder och det faktum att svenska elever inte arbetar med alla uppgifter i boken (t ex eleverna brukar välja antingen A- och B-delen, eller B- och C-delen) kan man konstatera att svenska läroböcker innehåller betydligt flera uppgifter än den japanska motsvarigheten.

6.1.3 Japanska läroböcker

Läroböckerna är i färgtryck och har många bilder som används för uppgifterna, eller för bättre förståelse av uppgifterna. Man märker att större delen av boken innehåller förklaringar av matematiska begrepp och diskussioner om olika lösningsmetoder. I läroböckerna upp till år 6 förekommer att två, tre ”elever” berättar hur var och en har löst/tänkt. I dessa läroböcker finns det 12 till 15 kapitel i varje årskurs, och varje högstadiebok har 6 kapitel. Upp till år 6 innehåller läroböckerna många laborations-, problemlösningsuppgifter och några matematikspel är invävda. Laborations- och problemlösningsuppgifterna har alltid ett samband med det kapitlet där uppgiften finns.

Varje kapitel börjar med en diskussions- eller laborationsuppgift som leder till ett nytt objekt. Eleverna själva skriver in tal i uträkningarna i boken för att kunna sätta sig in i uppgiften. När eleverna har arbetat noga med dessa uppgifter, förklarar boken det nya begreppet och pre-senterar definitioner och/eller lösningsmetoder. Sedan finns det några övningsuppgifter som eleverna kan träna det nya begreppet på. Dessa procedurer repeteras flera gånger i ett avsnitt. I slutet av varje kapitel finns det också 3 till 6 sidor med samlade repetitions uppgifter. Det finns kolumner som visar intressant information, som har ett samband med innehållet som eleverna håller på att lära sig. I slutet av varje högstadiebok finns det ca 15 sidor fördjupningsuppgifter som boken inte har behandlat tidigare, t ex ekvationssystem med tre variabler, olika snitt av en kub, sannolikheter för att något inte ska hända, bromssträcka och diagram, eller gyllene snittet.

6.2 Kronologisk genomgång av läroböcker

Tabell 2 i bilaga 2 visar en sammanställning av vilka matematiska objekt angående bråk och proportion läroböckerna behandlar årskursvis genom hela grundskolan. Jag har inte tagit in repetitioner eller exakt samma innehåll från föregående årskurser även om det handlar om bråk och proportion.

Upp till år 3 finns det inte så stor skillnad på vilka objekt läroböckerna behandlar i Sverige och i Japan. I båda länderna arbetar eleverna mycket med taluppfattning och rumsuppfattning. Skillnaden blir synbar först i mellanstadiet. Svenska elever ägnar mycket tid åt repetitioner som de skulle ha lärt sig i de tidigare åren och det kan man tydligt se från förklaringar av olika begrepp i början av ett avsnitt. Uppgifterna blir svårare och mer komplicerade i de högre årskurserna, dock läroboken tar inte in så många nya begrepp inom bråk och proportion. Man hittar ibland precis likadana uppgifter som står i C-uppgiften i år 4-boken och i B-uppgiften i de högre årskurserna. Japanska läroböcker hanterar mest nya begrepp utan att repetera vad eleverna skulle ha lärt sig de tidigare åren. Det finns många gemensamma matematiska objekt som behandlas i år 9 i båda länderna, även om objekten som behandlas mellan år 4 och år 8 skiljer stort.

6.3 Dimensioner av variation – bråk och proportion

Tabell 3 i bilaga 3 visar dimensioner av variation inom bråk- och proportionsbegrepp. Jag gick igenom olika litteraturer som diskuterar dessa begrepp för att kunna hitta dimensioner. Som jag nämnde i *5.1.3* har jag delat dessa begrepp i fyra underkategorier: Presentation av bråkbegrepp, Bråk med räkneoperation, Tillämpning av bråk och Proportionsbegrepp.

6.4 Dimensioner av variation i svenskt läroböcker

6.4.1 Presentation av bråkbegrepp

Jämnfördelning behandlas i år 2-boken precis efter 5:ans multiplikationstabell. Eleverna övar att dela olika antal föremål (elever i grupper, delar frukt eller pengar) eller dela geometriska figurer i jämna delar. Antalet som delas med är från två till fyra i år 2, då matematiska symboler som divisionsstreck utesluts helt. Först i år 3 presenterar den svenska läroboken division med matematiska symboler: $\frac{15}{3} = 5$ och termer: division, täljare, nämnare och kvot. Boken presenterar divisionstecken **:** , men tecknet förekommer endast i några uppgifter och används aldrig som divisionstecken i högre årskurser.

Bråk börjar man med i år 5 i Sverige officiellt, men som fördjupningsuppgifter presenteras bråkbegreppet redan i år 4-boken. Det står t ex i en uppgift: Vilket är störst, en tredjedel av 768 eller en fjärdedel av 996? Dessa uttryck har eleverna eventuellt hört tidigare i vardagliga situationer hemma eller i skolan, och eleverna kan ha en ganska bra uppfattning om vad en tredjedel eller en fjärdedel innebär utan begreppsförklaring i boken.

I år 5 börjar eleverna med bråk i ett kapitel som heter *Bråk och decimaltal*, där de arbetar med en del/delar av hel. Bråk presenteras med en bild av ett konkret och vardagligt föremål som t ex ett äpple eller en tårta som är uppdelade i upp till fyra delar.

Bild 1. ”Vad är ett bråk?”
(Undvall m.fl. 2006a, s.54)

På nästa sida jämförs ett bråk med ett annat bråk gällande storleken. Här inleds det med att talet 6 är större än 3, och sedan kommer en fråga: vilket tal är störst, 1/6 eller 1/3? Här finns två identiska bilder av chokladkakor som är uppdelade med streckade linjer i 1/6 och 1/3.

Bild 2. Vilket är störst, 1/3 eller 1/6?

”En tredjedels chokladkaka är mer än en sjättedels chokladkaka. Talet 1/3 är större än 1/6.” (Undvall m.fl. 2006a, s.55) Sedan presenteras räkneexempel: 1) skriv talen (t ex fjärdedelar) med siffror som bråktal, 2) skriv i bråkform en del och resten av delen av samma hel och 3) jämförelse av två bråktal. I nästa avsnitt arbetar man vidare med samband mellan bråktal och decimaltal. Här tas det upp omvandlingen av de användbara bråktalen och decimaltalen, t ex 1/2 = 0,5 eller 1/10 = 0,1 mm. Bråk presenteras för att inleda decimaltal och eleverna arbetar med decimaltal betydligt mer än bråk i år 5.

I år 6 inleder kapitlet ”Bråk och procent” med repetitionen från år 5, och sedan börjar de ett nytt begrepp, del av antal. Här koncentreras det mest på att räkna ut ett antal som motsvarar andel av en kvantitet, t ex hur mycket 2/5 är av 20 kr. Att räkna ut hela antalet när antalet av delen är känd tas däremot upp endast i C-uppgifter. Hela detta avsnitt används endast ord för förklaring av begreppen. Innan år 6-boken fortsätter med bråk i blandad form, förklaras det som i bild 3.

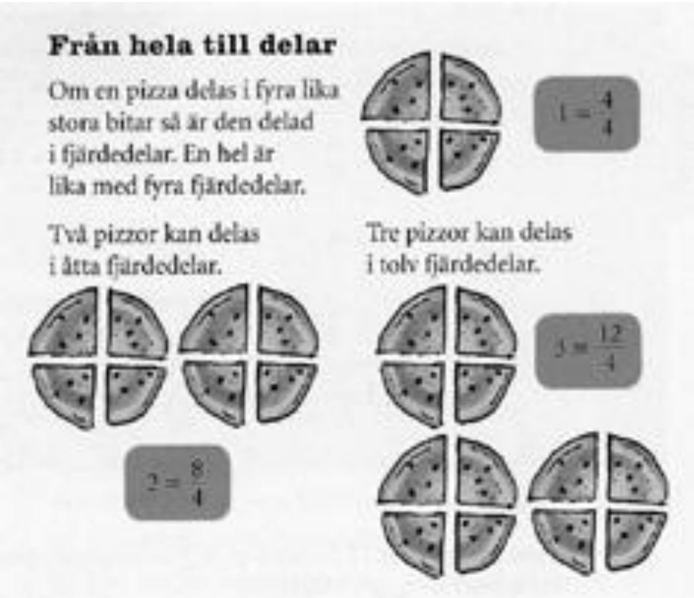


Bild 3. Från hela till delar

(Undvall m.fl.2007, s. 96)

Sedan presenteras bråk i blandad form med ett par bilder av pizzor som är uppdelade i 4 respektive 8 delar och när man har ätit upp vissa delar finns det t ex 5/4 = 1 ¼ kvar. I slutet av detta avsnitt behandlar C-uppgift om bråk och tid (år, vecka, dygn, klockslag), där eleverna ska vara uppmärksamma på bland annat att en heltimme är 60 minuter.

De flesta dimensioner av variation nämns i de svenska läroböckerna förutom *1.4 Relation mellan bråk och division; a delat med b (operation) ↔ a/b, 1.22 Naturliga tal i bråkform (nämnaren 1) ex 3/1 = 3, 1.23 a/b då b inte får vara 0 och 1.24 Bråk med decimaltal i nämnaren eller/och täljaren.* Avseende *1.21 Jämförelse av två bråktal som har olika hela* hittar jag endast på två ställen: en diskussionsuppgift om procent (Räkna ut andelen av brunögda elever när man vet att samma andel av flickor och pojkar är brunögda.) och en C-uppgift där det behandlas en jämförelse mellan två bråktal som har olika hela samt dessa två olika bråktal har samma kvantitet. Båda uppgifterna finns i år 7-boken, och det ges ingen begreppslig förklaring för dessa uppgifter.

6.4.2 Bråk med räkneoperation

Avseende *2.5 Talens delbarhet och primtal, faktorisering av tal*, behandlas faktorisering av tal emellanåt som extrauppgifter i år 3 och år 4. År 3-boken presenterar termen faktor. En uppgift med faktorer kan se ut så här: ”Ge två förslag på tal som kan stå i rutorna. ____ ·____· ____ = 24” (Undvall m.fl. 2005, s. 251) Termen primtal nämns i en fördjupnings-uppgift i år 7, där det diskuteras primtal och faktorisering av tal på två sidor. I boken används dock termen sammansatta tal istället för faktorisering. För att kunna dela ett tal i primfaktorer presenteras faktorträd.

Addition och subtraktion av bråk tas upp i år 7 och år 8. Hur man adderar eller subtraherar två bråk som har samma nämnare (inkluderat blandad form) visas med bild med rutor, matematiska symboler och ord som i bild 4.

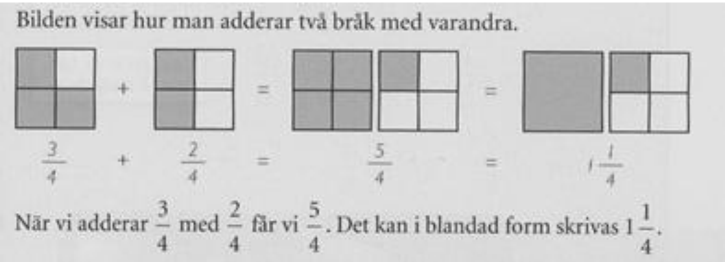


Bild 4. Addition av bråk
(Undvall m.fl. 2006b, s.203)

En diskussionsuppgift i år 7 upplyser ett fel som eleverna kan göra när man adderar två bråktal. Här ska man förklara om det är rätt eller fel när man räknar 1/3 + 1/3 = 2/6.

Förkortning av bråktal tas upp i år 7. Med en bild på tre stycken halvcirklar förklarar boken med både matematiska symboler och text att fyra åttondelar, två fjärdedelar och en halv har lika värde. Sedan förklaras det att man dividerar täljare och nämnare med samma tal för att få ett nytt bråk som är lika stort som det i början, och att det kallas bråk i sin enklaste form när man har förkortat bråket så långt som möjligt. Det följs med räkneexempel på hur man förkortar ett bråk med ett tal. Förlängning av bråk tas upp i år 8 och beskrivning av metoden är snarlik som motsvarigheten med förkortning. Det förklaras här ett nytt begrepp: den minsta gemensamma nämnaren.

> Om du vill ta reda på vilket tal som är störst av till exempel ¾ och 4/5 kan du använda dig av förlängning. Det minsta tal som är delbart med både 4 och 5 är 20.
> Därför kan både fjärdedelar och femtedelar skrivas som tjugondelar. Man säger då att 20 är den *minsta gemensamma nämnaren (Mgn)*. (Undvall m.fl. 2002, s. 60)

Multiplikation av ett bråk med ett heltal och av två bråk presenteras på samma sida. Hur man multiplicerar två bråktal förklaras med bild av cirklar, matematiska symboler och ord som följande:

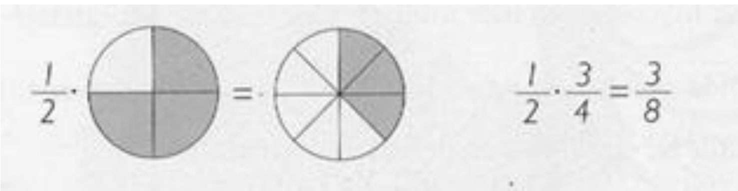
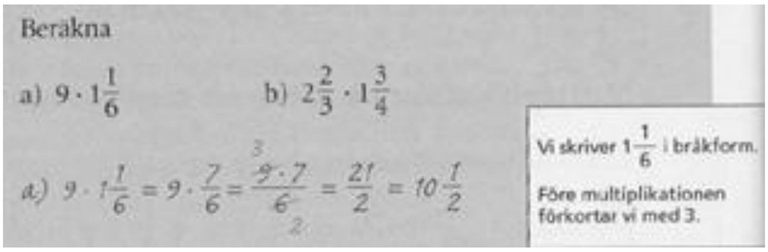


Bild 5 Multiplikation av bråk

Den första cirkeln har färglagts till ¾. Bilden får då motsvara bråket ¾. Att multiplicera ¾ med ½ är detsamma som att ta hälften av ¾, vilket är 3/8. I den högra cirkeln har vi färglagt 3/8. Du ser att det är hälften så mycket av den högra cirkeln som är färglagd. Detta visar att $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}=\frac{3}{8}$. (Undvall m.fl. 2002, s.69)

Räkneexemplet visar hur man förkortar täljare och nämnare medan man räknar uppgifterna (bild 6).



Beräkna

a) $9\cdot 1\frac{1}{6}$ b) $2\frac{2}{3}\cdot 1\frac{3}{4}$

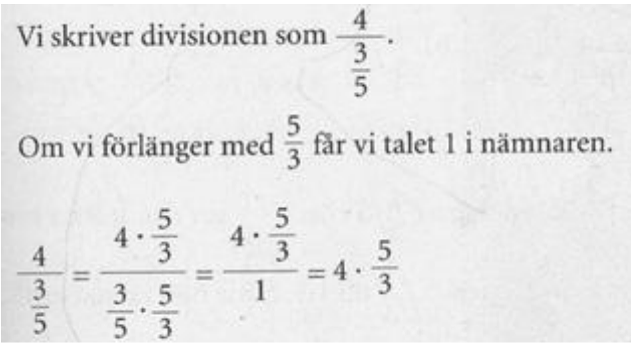
a) $9\cdot 1\frac{1}{6}=9\cdot\frac{7}{6}=\frac{\overset{3}{\cancel{9}}\cdot 7}{\underset{2}{\cancel{6}}}=\frac{21}{2}=10\frac{1}{2}$

Vi skriver $1\frac{1}{6}$ i bråkform.

Före multiplikationen förkortar vi med 3.

Bild 6. Multiplikation av bråk 2
(Undvall m.fl. 2002, s.70)

Boken fortsätter att förklara division av bråk, där det förklaras $\frac{15}{3}=15\frac{1}{3}$ eftersom både kvoten och produkten ger 5. Divisionen omvandlas till en multiplikation där täljaren multipliceras med nämnarens inverterade värde, som betyder täljaren och nämnaren byter plats. Här visas hur man räknar 4/3 delat med 5:



Vi skriver divisionen som $\frac{4}{\frac{3}{5}}$.

Om vi förlänger med $\frac{5}{3}$ får vi talet 1 i nämnaren.

$$\frac{4}{\frac{3}{5}}=\frac{4\cdot\frac{5}{3}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}}=\frac{4\cdot\frac{5}{3}}{1}=4\cdot\frac{5}{3}$$

Bild 6. Division av bråk
(Undvall m.fl. 2002, s.73)

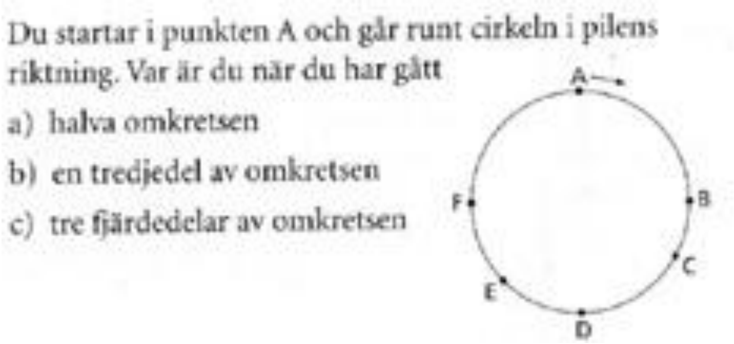
Förklaringen följs med ett räkneexempel på hur man dividerar bråktal praktiskt. I C-uppgifter finns två textuppgifter som kan lösas med division av bråk.

Från listan ”dimensioner av variation” i anknytning till räkneoperation tas de flesta dimensionerna i de svenska läroböckerna, men några dimensioner saknas. *2.14 Betydelse av multiplikation av två bråktal* förklaras inte så tydligt mer än vad presenteras ovan, och *2.17 Betydelse av division av två bråktal* förklaras inte mer än räkneproceduren. Likaså saknas diskussion kring *2.16 & 2.19 Multiplikation/division ger talet både mindre och större värde.*

6.4.3 Tillämpning av bråk

Cirkelsektorns förhållande till en hel cirkel behandlas redan i år 2 och cirkeldiagram börjar eleverna arbeta med i år 4. Vikten ligger endast på att läsa av diagrammets olika delar. Att rita cirkeldiagram är betydligt mer komplicerat jämfört med andra diagramtyper, och den enda uppgiften att rita ett cirkeldiagram är en fördjupningsuppgift i år 8, där eleverna utmanas att rita cirkeldiagram med sex angivna andelar i procent. Enstaka fördjupningsuppgifter rörande omkrets och area av olika figurer finns i både år 4 och år 5, och kombinationer av bråktal och area/omkrets behandlas ganska flitigt. Här är två exempel:

Uppgift 1



Uppgift 2

Hur stor del av figuren är de olika delarna?

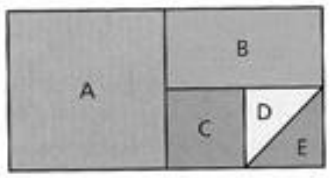


Bild 7. Bråk och figurer

(*Matematikboken 6* 2007, s.91)

Förenkling av algebraiska uttryck genom förkortning behandlas först i år 9 som $\frac{4x^3}{2x^2}$ och $\frac{12a^3b^3}{8a^2b}$. Här förklaras det som ”division av potenser” och några lösningsexempel visas genom att skriva ut alla faktorerna i potensform för att kunna förkorta lättare. Förlängning av algebraiskt uttryck behandlas i samband med ekvationslösning som ”ekvationer med nämnare”. Eleverna uppmuntras i boken att ”1) Bestäm den minsta gemensamma nämnaren, mgn. 2) Multiplicera alla termer med mgn. 3) Förkorta bort nämnarna och lös ekvationen på det sätt du lärt dig tidigare.” (Undvall m.fl. 2003, s. 60) Det följer två lösningsexempel.

6.4.4 Proportionsbegrepp

Uppgifter om talmönster förekommer oftast som extrauppgifter i mellanstadiet. En talmöster-uppgift kan se ut så här:

Vilket är nästa tal i talföljden?

3 9 15 21 ___ (Undvall m.fl. 2007, s. 37)

Mönsterproblem med olika figurer ges i slutet av år 4 som en gruppuppgift: att ställa bänkar till ett långbord. De vanligaste mönsterfigurerna är konstruerade med tändstickor eller kulor i form av geometriska figurer som triangel eller kvadrat. Här ska eleverna räkna ut antal stickor/kulor till t ex figur nr 5 eller 10 om mönstret fortsätter på samma sätt som bilden visar. Först i en fördjupningsuppgift i år 7 uppmuntras eleverna att hitta en generell regel för att kunna räkna ut antal stickor/kulor. I C-uppgifter i år 8 och år 9 arbetar eleverna att hitta ett uttryck/en formel för att räkna ut antalet i figur nr *n*, då *n* är ett obestämt naturligt tal. Alla dessa uppgifter behandlar en konstant ökning.

Begreppet proportionalitet arbetar inte svenska elever systematiskt med förrän den sista årskursen i grundskolan, men proportionellt tankesätt används emellanåt från och med år 3, speciellt i form av pris per antal. I en uppgift i år 3 används en tabell för att eleverna själva fylla i luckorna i tabellerna för att räkna ut priserna till olika antal föremål (t ex glass). En uppgift i åk 4-boken ser ut så här: Vad får du betala för 2 kg bananer om 5 kg kostar 45kr? (Undvall m.fl. 2005, s. 83) I år 5 presenteras termen ”jämförelsepris”, och i år 7 behandlas förhållandet mellan sträcka, tid och medelfart. Eleverna i år 5 börjar arbeta med skala, t ex 1:10, och år 7-boken tar upp begreppen förminskning och förstoring med olika skala.

I kapitlet som behandlar procent i år 8 visas hur man räknar ut andel i procent av det hela:

> När vi vill uttrycka hur stor delen är i procent börjar vi med att teckna förhållandet mellan delen och det hela. Förhållandet är ett bråk som omvandlas till procentform på vanligt sätt. Förhållandet = delen/det hela (Undvall m.fl. 2002, s. 112)

Diagram/koordinatsystem som visar proportionalitet visas först i slutet av år 5 som tema-uppgift och en likadan uppgift finns också i år 6. Genom dessa uppgifter övar eleverna att läsa av tid och sträcka från linjerna med jämn ökning (räta linjer), men det ställs aldrig frågor som berör om jämn ökning eller hastighet i just dessa uppgifter, (som nämnts tidigare, lär eleverna sig hastighet först i år 7). I en gruppgift i år 8 behandlas det olika linjediagram där eleverna avgör vilket diagram stämmer överens om var och ett påstående, och där framkommer termen ”konstant hastighet” och diagram med en rät linje.

I år 9-boken behandlas många objekt inom proportionsbegrepp. I ett avsnitt som behandlar tillämpning av ekvation i problemlösning nämns om ett förhållande mellan två tal.

> Antag att en skolklass består av 12 pojkar och 16 flickor.
>
> Man säger då att *förhållandet* mellan antalet pojkar och flickor är $\frac{12}{16}$.
>
> Förkortar vi bråket med 4 får vi $\frac{3}{4}$.
>
> Ett annat sätt att skriva förhållandet är 3 : 4. Man säger då att förhållandet är ”tre till fyra”.
>
> (Undvall m.fl.2003, s.78)

Ett exempel följer denna förklaring och det visar hur man räknar ut antal av två föremål (i detta fall antal flickor och pojkar) när förhållandet mellan dessa två tal är kända. Det förklaras med att $\frac{7x}{9x} = \frac{7}{9} = 7:9$ då *7x* är antal flickor och *9x* är antal pojkar.

I geometrin används proportionellt tanksätt flitigt inom likformighet. Eleverna arbetar med att ta reda på förhållande mellan två likformiga figurer och sambandet mellan längdskala och areaskala. Topptriangelsatsen följer och eleverna arbetar med att ta reda på sidlängden av en triangel genom att använda förhållande av två likformiga trianglar.

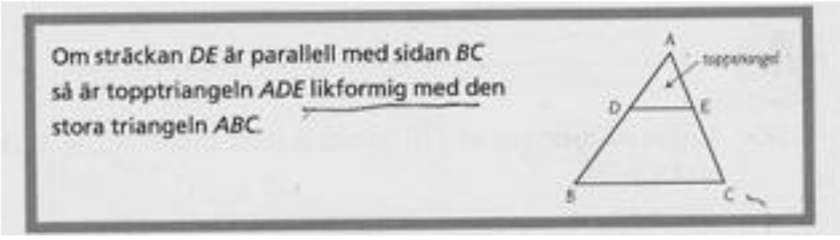


Bild 8. Topptriangelsatsen
(Undvall m.fl.2003, s.133)

Officiellt börjar eleverna med linjära funktioner, formler, koordinatsystem och proportionalitet i år 9. Bilaga 4 visar tre sidor som sammanfattar koordinatsystemet, funktion som formel, linjära funktioner och proportionalitet. Här förklaras många nya begrepp som eleverna ska lära sig, och funktionen (formeln) kopplas till x-värde och y-värde och till en linje i koordinatsystemet.

De dimensioner av variation som inte behandlas i svenska läroböcker är: *4.15* $a : b = c : d \leftrightarrow ad = bc$, *4.20* $k = \Delta x / \Delta y$, *4.21 Omvänd-proportionalitet* $y=k/x$, och *4.16 Begreppet proportionalitet* Konstant minskning tas inte upp. När det gäller representationer som används för att förklara olika objekt, är skriftligt ord och matematiska symboler de vanligaste i svenska läroböcker. För bråkbegreppet används bilder som konkreta föremål, cirklar och rutor, men bilder används sällan för att förklara proportion. Värdetabeller och koordinatsystem används för att förklara funktionsbegrepp.

6.5 Dimension av variation i japanskt läroböcker

6.5.1 Presentation av bråkbegrepp

Division börjar japanska elever med i år 3, då eleverna har lärt sig hela multiplikationstabellen. I början av kapitlet presenteras två problem: 1) att dela 12 småkakor i 4st var i ett visst antal påsar och 2) att dela 12 kakor jämt med 4 kompisar. Beträffande den andra frågan visas tre olika förslag för hur man delar kakor på fyra tallrikar: (1) att dela först på måfå och sedan justera genom att flytta kakor från dem som fått flest till dem som fått färre, (2) att dela först i två och sedan dela i två igen, och (3) att dela en i taget tills kakorna blir slut. Efter denna diskussion presenterar boken divisionstecken $\div$, som används alltid för operationen division genom hela grundskolan i Japan. Det förklaras också att i ”$12 \div 4 = 3$” kallas 12 som *talet som delas* och 4 som *talet som delar med*. Det följs olika räkneövningar, bland annat att hitta på egen uppgift som passar beräkningen $48 \div 6$ med hjälp av en tygremsa som är 48 cm lång. Här uppmuntras eleverna att tänka på att det finns två sätt att dela remsan: dela 48 cm i små remsor med 6 cm eller dela 48cm i jämna 6 delar (Bild 9). I slutet av kapitalet ställer boken frågor om uträkningar $0 \div 3 = ?$ och $6 \div 1 = ?$.

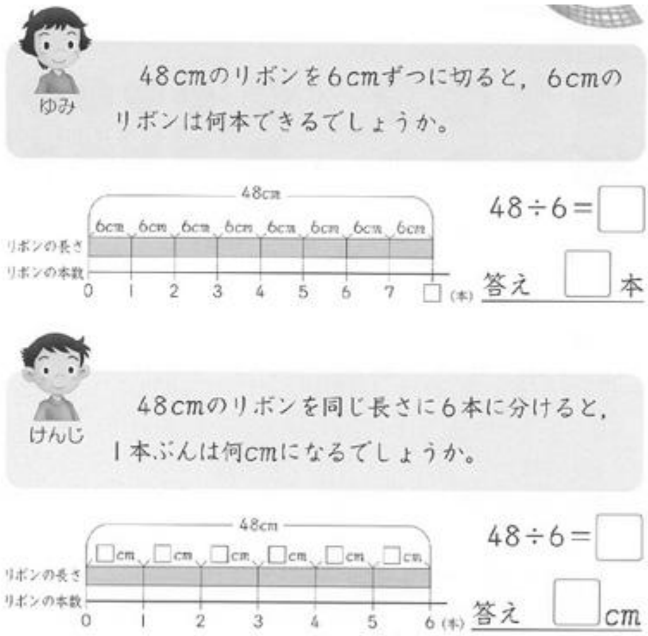


Bild 9. Att jämnfördela

(*Shougaku sansuu 3 a* 2009, s. 26)

Den första boken i år 4 behandlar bråk. Kapitlet börjar med ett problem: Hur mycket längre än 1 meter körde modell-bilen? Eleverna uppmuntras att inte tänka på skillnaden utan att uttrycka den resterande delen med förhållande till 1 m. För att lösa detta presenteras två bilder sidan om varandra. Den ena bilden visar att en meter är lika lång som fyra stycken av en del som delas i fyra lika längder av en meter, och den andra bilden visar att en del som delas i fyra lika längder av en meter är en fjärdedel av en meter. Sedan förklarar boken termen *en fjärdedel* som skrivs som ¼. ¼ m är en längd som blir en meter med fyra stycken. Det följs två uppgifter och den andra uppgiften frågar eleverna hitta 1/5 m utav 3 olika alternativ.

Bild 10. Vilket är 1/5 m?

(*Shougaku sansuu 4 a* 2009, s.53)

Sedan frågas eleverna hur man kan uttrycka de två färgade delarna av en remsa där delas i tre lika delar, och hur många 1/3 det går åt i de färgade delarna. På nästa sida förklaras definitioner av *bråk, nämnare och täljaren*. Det frågas sedan hur långt är 2st, 3 st och 4 st av 1/5m med hjälp av bilden av 5 remsor, och sedan förklaras 5/5m är 1 m.

Nästa avsnitt handlar om jämförelse mellan olika bråk med samma nämnare. Eleverna uppmuntras också att tänka på hur mycket det ena talet är större än det andra talet. I slutet av detta kapitel finns två laborationsuppgifter. Den ena är att vika en meter lång remsa ska vikas i flera gånger, så att eleverna ska förstå att hälften av ½ är ¼, hälften av ¼ är 1/8, osv. Den andra uppgiften utgår att markera 1/5, 2/5, ... på en remsa som är 1 m lång genom att ställa remsan diagonalt på jämna parallella linjer (bild 11).

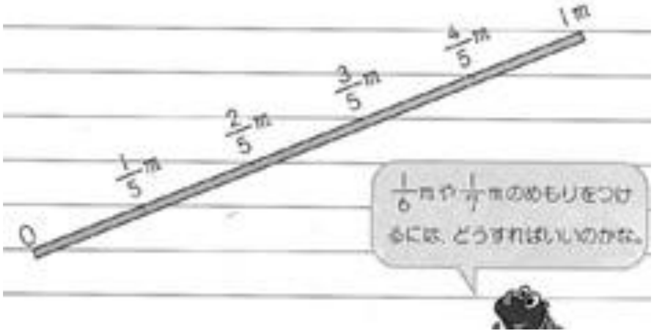


Bild 11. Parallella linjer och bråk

Här frågar den lilla dinosaurien hur då man kan markera 1/6 eller 1/7.

(Sawada & Okamoto 2009g, s.59)

I den andra terminen i år 4 arbetar eleverna med bråk som är större än 1. Kapitalet börjar med ett problem som frågar hur många kilometer vägen är om man går genom punkten a, b, c, d och e. Eleverna får en fråga: hur många 1/3 km är sträckan mellan a och e? (bild 12) På nästa sida förklaras bråktalet 4/3 km. Eleverna lär sig nya termer: *bråktal som är mindre än 1* och *bråktal som är större än 1* och sedan *bråk i blandade form*. I slutet av kapitlet förklaras skillnaden mellan bråktal och decimaltal så här: Bråktal utgår från t ex 1/3, 1/5 eller 1/7 som bas och uttrycker storleken enligt dessa baser. Däremot utgår decimaltal från t ex 0,1 som bas och uttrycker storleken enligt hur många 0,1 går i talet.

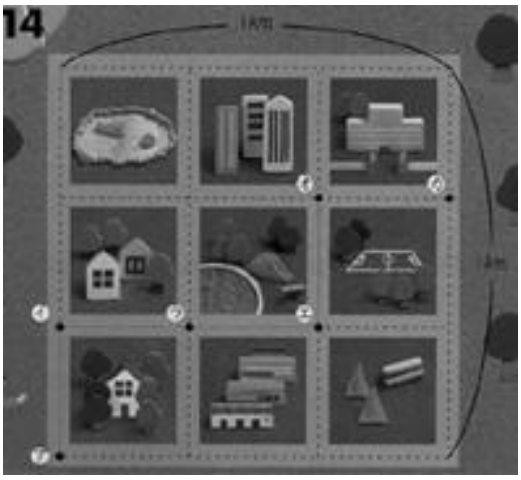


Bild 12. Bråk som är större än 1

(*Shougaku sansuu 4 b* 2009, s.61)

Precis före addition och subtraktion av bråktal med samma nämnare i år 5, behandlar boken olika bråktal som har samma värde som ½ eller 1/3 med hjälp av cirklar och rutor. Sedan jämförs storlek av ½, 1/3, ¼, ..1/10 med parallella tallinjer, och förklaras med att ju större nämnaren är med samma täljare, ju mindre blir värdet av bråktal när man har samma täljare.

Olika bråk som har samma värde undersöks precis innan eleverna börja med addition och subtraktion av bråktal med olika nämnare. Då uppmuntras eleverna att hitta samband mellan storlek av täljare och nämnare, och detta leder till regeln: När man multiplicerar/dividerar samma tal både med täljaren och med nämnaren i ett bråk förändras inte värdet på bråktalet. Detta visas med symbolerna: $\blacktriangle/\bullet = \blacktriangle\cdot\square \,/\, \bullet\cdot\square$ och $\blacktriangle/\bullet = \blacktriangle\div\square \,/\, \bullet\div\square$. Efteråt arbetar eleverna med förkortning och förlängning av bråktal (se *6.5.2*).

Nästa avsnitt handlar om sambandet mellan division och bråktal. Boken tar upp ett problem som frågar hur man kan uttrycka exakt mängd av juice om man delar två liter juice med tre kompisar. ”Eleverna” i boken kommer fram till att det inte går jämt upp när man delar 2 med 3. På nästa sida visar det att det går att skriva 2/3 liter. Alltså $2 \div 3 = 2/3$. Regeln beskrivs med texten: ”talet som man delar skrivs som täljare och talet som man delar med skrivs som nämnaren” och som symbolerna: □ ÷ ▲ = □ / ▲. Kapitlet fortsätter behandla sambandet mellan bråktal och decimaltal, och eleverna övar att omvandla decimaltal till bråkform som 1,47 = 147/100 (Man utgår från 0,01 = 1/100). Boken förklarar också att det finns bråktal som inte kan omskrivas exakt i decimalform som 5/6 = 0,833… Här tilläggs också att naturligt tal kan skrivas i bråkform som 7 = 7 ÷ 1 = 7/1.

Procent börjar man med i den andra terminen i år 5, men procent behandlas inte i samband med bråk i Japan utan i samband med förhållande och statistik. Man kan se i boken en tydlig koppling mellan procent och decimaltal, men en koppling till bråktal förekommer inte i detta kapitel. Det är värt att nämna att detta kapitel är det enda i hela grundskolan där eleverna arbetar aktivt med procent. Även i sannolikhet som eleverna lär sig år 8 används nästan bara bråk istället för procent. Samband mellan procent och förhållande ska jag ta upp noggrant i *6.5.4.* I listan dimensioner av variation behandlas de flesta dimensioner i Japan förutom *1.23 a/b då b inte får vara 0.*

6.5.2 ***Bråk med räkneoperation***

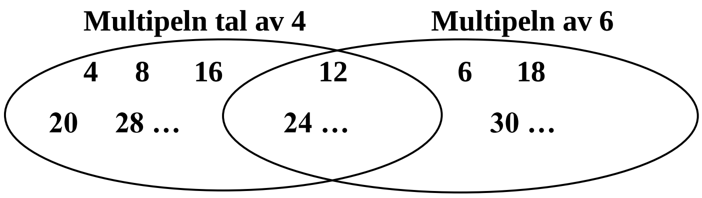
Addition och subtraktion av bråktal med samma nämnare börjar eleverna i år 5 med, först enkla beräkningar och sedan blandade beräkningar som $1\frac{1}{3}-\frac{2}{3}$. I detta fall uppmuntras eleverna att ändra $1\frac{1}{3}$ till $\frac{4}{3}$ först för att utföra subtraktion. I slutet av kapitlet ger boken tips så här:

2000 + 3000	----	Med hjälp av basen ( ) räknar du 2 + 3.
0,2 + 0,3	----	Med hjälp av basen ( ) räknar du 2 + 3.
2/5 + 3/5	----	Med hjälp av basen ( ) räknar du 2 + 3.

(Sawada & Okamoto 2009j, s.14)

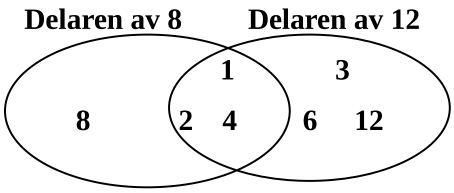
Alltså ska eleverna fylla i luckorna med 1000, 0,1 och 1/5. Även om basen är olika kan man räkna ut dessa med uträkningen 2 + 3.

Innan eleverna i år 6 börjar med addition och subtraktion av bråk med olika nämnare, arbetar eleverna i ett helt kapitel med två egenskaper av naturliga tal: gemensamma multipeln och gemensamma delare. Kapitlet inleds med ett problem där eleverna ska köpa korvar och korvbröd. Korvar säljs 6st i en påse och 4 bröd i en påse. Man ska undersöka möjligheter för att köpa dessa för att göra ”korv och bröd” utan att det blir något över. Eleverna uppmuntras att göra en tabell som visar samband mellan antal påsar och antal korvar och en annan tabell för antal påsar och antal bröd. Sedan ska eleverna ringa in dessa multipler i var sin tallinje för att kunna hitta gemensamma tal från 4:ans och 6:ans multiplikationstabell. Det visas sedan så här:

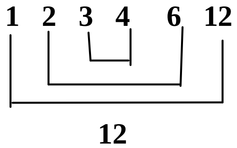


Alltså är 12 och 24 gemensamma multipeln av 4 och 6. Det finns många (egentligen oändliga) sådana gemensamma multipler, men det minsta talet kallas den minsta gemensamma multipeln. Sedan övar eleverna att hitta sådana tal mellan ett par tal.

I nästa avsnitt arbetar eleverna på likadant sätt med hjälp av tabeller och tallinjer för att komma fram till den gemensamma delaren till 8 och 12. Här uppmärksammas det också att det finns tal som har bara två delare (alltså kan man dela bara med 1 och sig självt), även om termen primtal inte används. Boken visar en annan bild i form av mängdteorin som nedan och förklarar att det största talet av gemensamma delarna kallas den största gemensamma delaren.



I slutet av kapitlet visas en egenskap hos delare. Delarna till 12 är 1, 2, 3, 4, 6 och12 och när man multiplicerar den minsta, 1, och den största, 12, blir produkten 12. Produkten av den näst minsta och den näst största och produkten av två tal i mitten är också 12. Eleverna uppmuntras att kontrollera med delarna till 16 om denna regel också stämmer med 16.



När boken har gått igenom sig dessa begrepp, multipel och delare, börjar eleverna att arbeta med addition och subtraktion av bråk med olika nämnare. Först undersöker eleverna olika bråk som har samma värde (se *6.5.1*). Boken tar upp regeln: värdet av bråk förändras inte när man multiplicerar/dividerar med samma tal i både nämnaren och täljaren. Efteråt arbetar eleverna med förkortning och förlängning. För att förkorta ett bråk visas det två olika sätt som bild 12, och boken förklarar att man brukar förkorta så långt som möjligt. För att jämföra storleken av två bråktal med olika nämnare förlänges bråket. Eleverna uppmuntras att använda

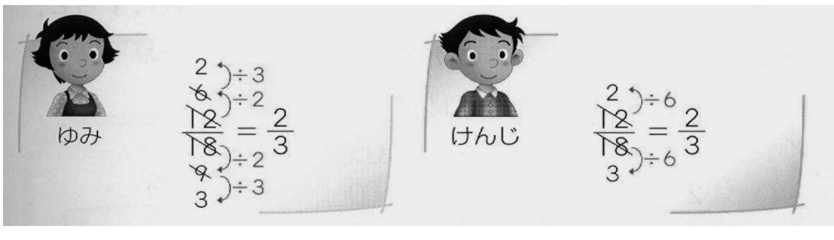


Bild 12. Att förkorta ett bråk (Sawada & Okamoto 2009k, s.17)

den minsta gemensamma multipeln för att kunna hitta ett lämpligt tal att förlänga med.

Eleverna i år 6 fortsätter att arbeta med multiplikation och division av bråk. Jag presenterar här två avsnitt: multiplikation av två bråktal och division av två bråktal. Angående multiplikation inleder ett problem: Man har 1 dl färg som man kan måla 4/5 m² en mur med. Hur många kvadratmeter kan man måla 1/3 dl färg med? (Bilaga 5) Här förklaras det att man ska tänka precis likadant som man räknar med heltal:

(arean som 1dl färg kan täcka) · (volym på färg) = (arean man kan måla på).

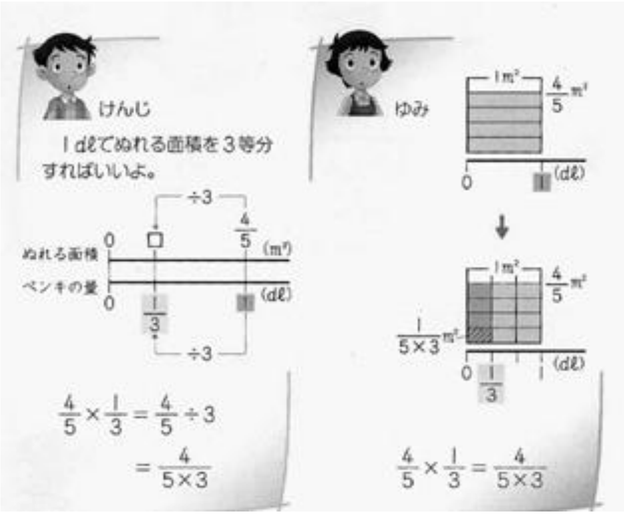


Bild 13. Multiplikation av bråk

(Sawada & Okamoto 2009l, s.10)

Eleverna uppmuntras att skriva en uträkning som löser problemet med (4/5 · 1/3). Sedan diskuteras räknesätt som bild 13, där den ena eleven säger att det är samma sak som man delar med 3. Den andra eleven delar $\frac{4}{5}$ – rutorna i tre delar och kommer fram till med beräkningen: $\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{5\cdot3}$. Detta sammanfattas med text och symboler:

▲ /● · □/◊ = ▲· □ / ● · ◊.

I slutet av avsnittet uppmuntras eleverna att kontrollera om kommutativa lagen och distributiva lagen som man tidigare lärt sig med naturliga tal gäller också för bråkräkning.

Angående division av två bråk, inleds ett problem: Hur stor area kan man måla med 1 dl färg om muren på 2/5 m² kan målas med 3/4dl samma färg? Först presenteras ett räknesätt: *(arean man kan måla på) / (volym på färg) = arean som 1 dl färg kan täcka).* Här diskuteras det också två tänkesätt (bild 14). Diskussionen av dessa lösningsmetoder leder till en räkneregel för division av två bråktal med text och symboler: ▲/● ÷ □/◊ = ▲· ◊ / ● · □.

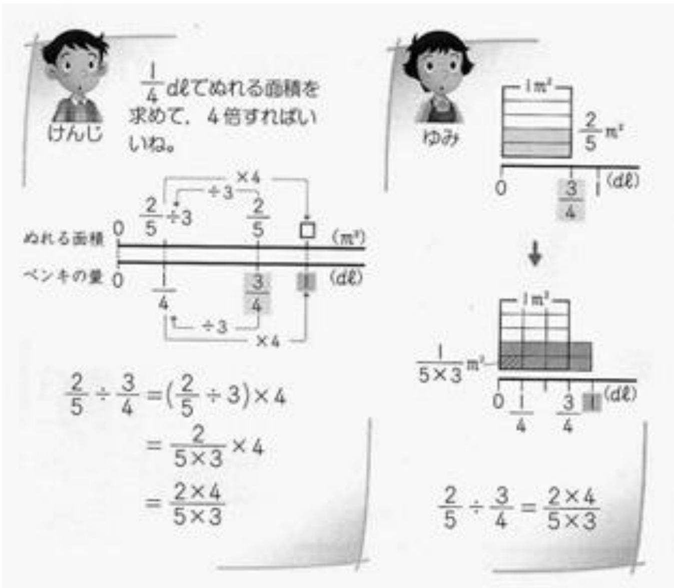


Bild 14.Division av bråk (Sawada & Okamoto 2009l, s.22)

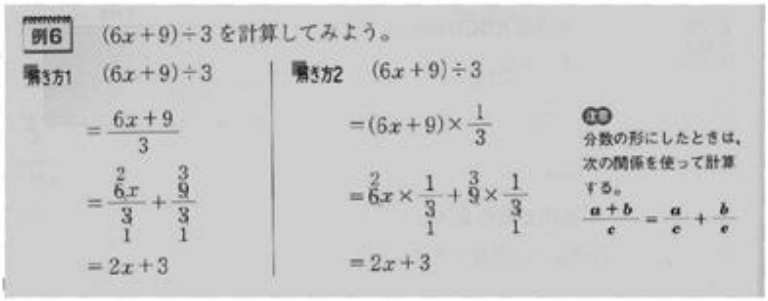
I de japanska läroböckerna bearbetas alla dimensioner av variation djupgående.

Gällande *2.16 Multiplikation ger talet både mindre och större värde* och *2.19 Division ger talet både mindre och större värde*, tas dessa inte upp i samband med bråkräkning utan med decimalräkning som eleverna lärt sig tidigare än multiplikation/division av bråktal (år 5).

6.5.3 Tillämpning av bråk

I japanska läroböcker behandlas klockan och tiden i en mycket liten utsträckning, och förekommer endast i åk 3 och i en diskussionsuppgift i år 6, då boken uppmärksamgör sambandet mellan tid och bråktal, dock endast 30 min = 1/2h och 15 min = 1/4h.

Cirkeldiagram lär japanska elever i år 5 i ett kapitel Förhållande och diagram. I detta kapitel behandlas först förhållande och procent, och sedan banddiagram och cirkeldiagram som eleverna ska rita genom att använda procentsatser i förhållande med det hela. Eleverna uppmuntras räkna ut procentsatser i tabellen och sedan rita ett cirkeldiagram enligt vissa regler. Faktorisering, förkortning och förlängning av algebraiskt uttryck och ekvationer behandlas i hela högstadiet. I år 7 och år 8 lär man sig multiplikation och division av algebraiska uttryck, förenkling av uttryck och faktorisering av uttryck. Här förklaras det att man kan förkorta antingen genom att ändra division till bråkform eller genom att invertera det tal man delar med.



例6 $(6x+9)\div 3$ を計算してみよう。

書き方1 $(6x+9)\div 3$

$$= \frac{6x+9}{3} = \frac{\overset{2}{\cancel{6}}x}{\underset{1}{\cancel{3}}} + \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 2x+3$$

書き方2 $(6x+9)\div 3$

$$= (6x+9)\times\frac{1}{3} = \overset{2}{\cancel{6}}x \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}} + \overset{3}{\cancel{9}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 2x+3$$

分数の形にしたときは、次の関係を使って計算する。

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Bild 15. Division av algebraiskt uttryck (Sawada & Sakai 2009a, s.62)

Ekvationslösning börjar man i år 7, där förlängning av bråktal utnyttjas. I år 9 lär man sig faktorisering av mer komplicerade uttryck som andragradsuttryck genom olika regler samt faktorisering av naturliga tal och primtal. Parentes-, konjugat- och kvadreringsregler presenteras genom bevisföring med geometriska figurer. Det viktiga här är att eleverna inte bara ska kunna förenkla (eller ”öppna upp parentesen”) utan faktorisera ett uttryck med parenteser. Eleverna förväntas att kunna utnyttja dessa fyra regler från båda håll. Faktorisering av algebraiskt uttryck utnyttjas flitigt för andragradsekvationslösning som eleverna arbetar med senare i åk 9.

6.5.4 Proportionsbegrepp

När man går igenom läroböcker som används i Japan märker man att förhållande- och proportionsbegreppen tillhör de viktigaste områden i mellan- och högstadiet, och behandlas i ett par kapitel varje årskurs upp till år 9. I slutet av år 4 behandlas proportionsbegreppet i ett kapitel för första gången. Kapitlet börjar med en laborativ uppgift där det undersöks förhållandet mellan två sidolängder av en rektangel vars omkrets är 18cm. Först uppmuntras eleverna att fylla i en tabell som visar förhållandet mellan längd och bredd i rektangeln. Sedan frågar boken vad som händer med bredden när längden ökar med 1cm, 2cm osv. Nästa fråga som ställs är att skriva sambandet i beräkningen som en generell regel. I slutet av kapitlet finns det en fördjupningsuppgift där eleverna ritar sambandet i rektangelproblemet som ett punktdiagram.

Andel och procent behandlas i år 5. Kapitlet inleds med ett problem, som frågar vilken sportsklubb som är den populäraste. En tabell visar max medlemsantal och antal anmälningar till fyra klubbar. Eleverna uppmuntras att kontrollera hur många gånger antalet anmälningarna går i antalet som var och en klubb kan ta emot. Fotbollsklubben ska ha 20 medlemmar och har 30 anmälningar. Det visas två tallinjer, där den ena linjen visar antal medlemmar och den andra linjen anmälningar, och antal medlemmar är markerad som 1 (Bild 16). Man gör beräkningen 30/20 för att kunna veta förhållandet mellan anmälningarna gentemot antalet medlemmar (som är 1), och svaret är 1,5 gånger fler. Alltså är förhållandet är 1,5. Boken förklarar definitionen av förhållande som ”ett tal som visar hur många gånger *det som är bas* går i *det som jämförs med*”.

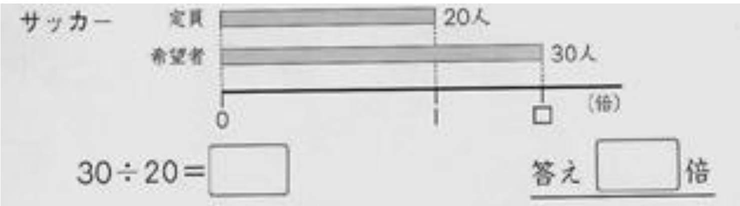


Bild 16. Förhållande

(Sawada & Okamoto 2009j, s.38)

I slutet av detta avsnitt visar boken beräkningsmodellen: *(Andelen) = (det som jämförs med) / (det som är bas).*

Efter detta börjar eleverna med andel i procentform. Först får eleverna en uppgift där man ska svara på andelen i decimalform först. Sedan förklarar boken om definition av procent med hjälp av text och en tallinje som är markerad i hundra delar. Tallinjen visar att 0,1 är samma som 10 %, 0,5 är som 50 % och 1 är som 100 %. Efteråt finns det uppgifter, där eleverna räknar ut kvantiteten av delen när andelen (procentsatsen) och antalet av det hela är kända. Det börjar med en uppgift, som förklarar att 32 % av 400 betyder 0,32 gånger av 400, alltså kan man räkna ut: 0,32 · 400. Sedan visas beräkningsmodellen: (*Det som jämförs med) = (Det som är bas) ·(Andelen).* Sedan arbetar eleverna med rabatt och moms i procentsatser. Där visas två olika sätt att lösa: (1) Att räkna ut det rabatterade priset först och subtrahera detta från det ursprungliga priset (2) Att tänka på hur många procent det blir efter rabatt (förändringsfaktor) och använda detta för att räkna ut det nya priset direkt. Här används två tallinjer för att visa det ursprungliga priset och det nya priset.

I år 6 är det dags att arbeta med ”Storlek per enhet” där eleverna lär sig folktäthet, bensinförbrukning och slutligen hastighet. Kapitlet inleds med ett problem som handlar om tre hissar som många barn åker i. Problemet utgår från att tänka ut vilken hiss man står tätaste i. På nästa sida visas en tabell om area av var och en hiss och antal personer som finns i hissarna som nedan:

	Area (m^2)	Antal personer
Hiss nr 1	**6**	**18**
Hiss nr 2	**6**	**15**
Hiss nr 3	**4**	**15**

Den första frågan som ställs är vilken hiss man står tätast i av hiss nr 1 och nr 2, och sedan hiss nr 2 och nr 3. Boken uppmärksamgör att hiss nr 1 och nr 2 har samma area, och att det finns lika många i hiss nr 2 och nr 3, så den första frågan kan man besvara med logik utan beräkning. Nästa fråga är vilken hiss är tätast mellan hiss nr 1 och nr 3. ”En elev” räknar antal personer per kvadratmeter på både hiss nr 1 och hiss nr 3. ”En annan elev” räknar area per person på båda. Det frågas sedan hur talets storlek blir när man ser antal personer per m^2, och hur det blir när man tittar på area per person. Till sist sammanfattas det att folktätheten kan man jämföra genom att räkna ut antal personer per m^2 eller area per person. Eleverna arbetar vidare med andra områden inom ”storlek per enhet” som bland annat folktäthet (invånarantal/km^2) och bensinförbrukning. I en kolumn visas olika exempel av ”storlek per enhet” i vardagen: t ex näringsinnehåll i mjölkförpackning, styckpris i ett storpack och meterpris på ett tyg.

Nästa avsnitt handlar om medelhastighet. Här diskuteras två sätt för att uttrycka hastighet: *sträcka per tid* och *tid per sträcka*. Sedan ställs en fråga: vilket av alternativen som stämmer med påståendet: Ju större talet är ju högre blir hastigheten. Sedan arbetar eleverna med en uppgift att räkna ut medelhastigheten (sträcka per timme). Efteråt presenteras definitionen av medelhastighet och en formel: *hastigheten = sträckan / tiden.* I en kolumn förklaras enheten km/h som visar *sträcka/timme*. På nästkommande sidor arbetar eleverna med uppgifter som leder till andra formler: *sträckan = hastigheten · tiden* och *tiden = sträckan / hastigheten*.

Senare i år 6 börjar eleverna arbeta med förhållande i ett kapitel. Det börjar med ett problem där en elev använde 200 ml mjölk och 300ml kaffe för att göra ”mjölkkaffe” och nu vill man öka mjölkmängd till 400ml utan att ändra smaken. En elev löser problemet genom att lägga till en kopp kaffe (100ml), vilket är felaktigt. En annan elev dubblerar kaffemängden för att mjölkmängden blivit dubbelt så mycket. På nästa sida uppmuntras eleverna att tänka på proportionen mellan två tal och i detta fall är det 2 : 3. Det följer definitionen av proportion som beskrivs med två tal och symbolen **:** . Boken fortsätter att förklarar att 4 : 6 och 2 : 3 har samma förhållande och uttrycks som 4 : 6 = 2 : 3. Sedan undersöks sambandet mellan 2 : 3 och 4 : 6. Det sammanfattas att om man multiplicerar/dividerar ett förhållande med samma tal är lika som det ursprungliga förhållandet.

Bild 17 Förhållande

(Sawada & Okamoto 2009l, s.34)

I år 8 tas förhållande upp igen. Innehållet är en repetition av vad som behandlats i år 6, men det generaliseras här i en algebraisk form. Det visas så här:

Förhållande* *a : b*

Förhållande* *a/b* **På japanska uttrycks dessa i olika termer.*

Om c *: d* är lika som *a : b, gäller a : b = c : d* (Sawada & Sakai 2009b, s.23)

Eleverna uppmuntras sedan att bevisa *4x = 3y* om *x : 3 = y : 4*. Enligt de ovannämnda reglerna kan man skriva om *x : 3 = y : 4* till x/3 = y/4. Genom att multiplicerar båda leden med 12 får man 4x = 3y. Så är påståendet bevisat. Till sist sammanfattas det så här: Om *a : b = c : d*, då *ad = bc*, och det illustreras så här:

ad

a : b = c : d

bc

En proportionell ökning börjar den japanska läroboken i år 6. Det inledande problemet handlar om fyra olika proportionella samband, och jag presenterar det första sambandet här, nämligen sambandet mellan vattenhöjden i badkaret och tiden när vatten fylls (bilaga 6). En tabell presenteras för att visa förändringen av vattenhöjden med tiden. Eleverna skall kontrollera hur det blir med vattenhöjden när tiden ökar med en minut, och hur vattenhöjden ändras när tiden dubbleras. Sedan förklaras definitionen av proportionsbegrepp: ”Det finns två tal och om det ena talet blir dubbelt, tre gånger, fyra gånger, …, ändras det andra också som dubbelt, tre gånger, fyra gånger, … Då säger vi att dessa tal är i proportionellt förhållande.” Sedan visas det med hjälp av tabellerna att gällande två proportionella tal, så blir det ena talet ½, 1/3, eller 1,5 gånger, 2,5 gånger, då ändras det andra på samma sätt som det första. Detta visar proportionalitetens kontinuitet.

Nästa steg i badkars-problemet är att undersöka sambandet mellan tiden och vattendjupet i varje kolumn, vilket i detta fall visar att värdet på vattendjupet är dubbelt så mycket som värdet för tiden för just detta djup. T ex vid 1 minut är djupet 2 cm, vid 2 minuter är djupet 4 cm, osv.

Sedan uppmuntras eleverna att skriva en formel med ● och ▲ då ● är för tiden och ▲ för vattendjupet. I form av tankebubblor ger boken tips för eleverna: ”tiden gånger 2 är vattendjupet”, ”vattendjupet delat med 2 är tiden” och ställer en fråga: ”vad innebär talet 2 här?”.

Den sista aktiviteten i detta avsnitt är att rita in värden i tabellen i ett diagram som är förtryckt i boken. Eleverna uppmuntras också att rita in flera punkter där värdet på tiden är decimaltal som 0,5, 1,5 eller 2,5. Sedan frågas eleverna att läsa av värdet av vattendjupet då tiden har värdet 7,5. Boken sammanfattar till sist att en graf som visar förhållandet mellan två proportionella mängder är en rät linje som går igenom punkten 0.

År 7 fortsätter eleverna med proportionalitet. Innehållet av proportionsbegrepp ligger på samma nivå som vad år 6-boken behandlats, men eleverna lär sig i år 7-boken mer matematiskt med formler och koordinatsystemet. Boken tar upp ett problem som liknar badkars-problemet från år 6. Skillnaden från år 6 är att skriva sambandet algebraiskt: $y = 2x$ när x är tiden och y är vattendjupet. (Då har eleverna arbetat med algebraiskt uttryck och ekvationer genomgående i de två föregående kapitalen.) Olika objekt förklaras stegvis i flera sidor, t ex *variabler* och *koefficienter*, ” y är proportionell mot x om $y = ax$”, och ”a benämns koefficient och är lika med kvoten y/x”. Eleverna fortsätter vidare att lära sig ett begränsningsområde inom ett proportionellt samband och begränsningsområdet för x-värdet är negativt. Proportionalitet med en negativ koefficient behandlas också genom att kontrollera värdetabellen till funktionen $y = -4x$, och sedan eleverna övar att skriva en formel om man känner till y-värdet vid ett visst x-värde.

Koordinatsystemet behandlas i nästa avsnitt, där det finns några övningar som eleverna ska rita linjära funktioner. Sedan undersöks förändringar av x- respektive y-värde i olika proportionella linjer. Detta leder till en förklaring om egenskaper av koefficienten a som visar sambandet mellan lutning av en linje och ökning/minskning av y-värde. Sedan undersöker boken samband mellan formler och linjer. I år 8 fortsätter eleverna med begreppet linjära funktioner. Innehållet ändras inte så mycket som i år 7, men eleverna undersöka funktioner mer ingående genom att rita en funktion med hjälp av en ekvation eller ett par koordinater, och att skriva en formel med hjälp av en linje i koordinatsystemet. År 7-boken tar upp omvänd proportionalitet i ett kapitel, som behandlas på likadant sätt som proportionalitet.

Likformighet i geometri arbetar japanska elever med i år 9. I år 8 har de redan arbetat grundligt med kongruens. En inledande laborationsuppgift handlar om att rita av en figur av flygplan i tre olika sätt: först förstoring endast på bredden, sedan förstoring endast på längden och slutligen både på bredden och på längden. Därefter förklaras att den sista figuren är dubbelt så stor både på längden och på bredden som den ursprungliga figuren, eller den ursprungliga figuren är hälften så stor som den sista figuren. Sedan förklaras definitionen av förstoring och förminskning. Sedan får eleverna en uppgift där de ska hitta förstorade eller förminskade figurer till en figur. Efter övningen får eleverna en definition av likformighet med ord och matematiska symbolen som följande: Fyrhörning ABCD $\backsim$ Fyrhörning EFGH.

Sedan övar eleverna att rita en likformig figur som är dubbelt/hälften så stor som den ursprungliga figuren genom att utnyttja tre linjer som går igenom en gemensam punkt och figurens kanter. Här presenteras ett sådant sätt att rita i bild 18.

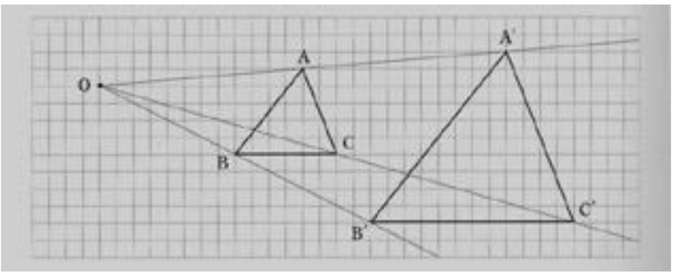


Bild 18. Likformighet

(Chuugaku suugaku *3* 2009, s.97)

I nästa avsnitt undersöks egenskaper av likformiga figurer med hjälp av två likformiga fyrhörningar och två tabell där information av sidolängder och vinklar fylls i. Sedan uppmuntras eleverna att motivera vad de har kommit fram till från denna undersökning. Boken förklarar tre villkor för att två figurer blir likformiga gällande sidlängder och vinklar. Boken fortsätter med förhållande för likformiga figurer som skrivs som 1 : 3 (eller 1/3). Förhållandet 1 : 1 tas också upp, som betyder att figurerna är kongruenta. För att ta reda på en sidolängd av en likformig figur, kan man utnyttja regeln ”Om $a : b = c : d$, då $ad = bc$”, som åk 8-boken behandlats. Efter övningar av detta fortsätter eleverna att lära sig bevisföring av likformigheten av två figurer genom att använda de tre villkoren för likformighet. I slutet av avsnittet arbetar eleverna med tillämpningsuppgifter om karta och skala, och uppgifter där man tar reda på avstånd/höjd mellan två punkter genom att utnyttja en förminskad ritning av triangel.

Nästa avsnitt handlar om parallella linjer som delar en figur. Här presenteras triangel-satsen och satsen av parallella linjer djupgående. Eleverna söker längder av en linje eller en del av linjer genom triangelsatsen eller satsen av parallella linjer, eller arbetar med bevisföring t ex om linjer är parallella eller om förhållandet mellan två delar av en linje är lika som förhållandet mellan två delar av en annan linje.

När det gäller representationer i japanska läroböcker, används det mängder av representationsformer. Förutom skriftliga ord och matematiska symboler, används tallinjer, rutor och tabeller flitigt samt pre-algebraiska/algebraiska symboler.

7 Slutsatser och diskussion

I detta arbete har matematikläroböcker från Sverige och Japan undersökts och analyserats angående hur bråk- och proportionsbegrepp behandlas i böckerna. Som forskningsgrund har jag utgått från variationsteorin där det diskuteras vikten av vilka dimensioner av variation elever har möjlighet att erfara för att förstå ett matematiskt objekt. För att eleverna ska kunna få kunskap om ett objekt, bör objektet upplevas ur olika kritiska aspekter. För att kunna urskilja aspekterna måste dessa behandlas samtidigt och relateras till varandra och till helheten, inte som skilda delar (Marton & Booth 2000, Marton m.fl. 2004).

I läroboken behandlas ett lärandeobjekt som det intentionella lärandeobjekt som läroboksförfattare (och eventuellt lärare) avser att eleverna ska lära sig. Samtidigt kan läroboken ge eleverna viktiga tillfällen att erfara olika dimensioner av variation om ett lärandeobjekt. Därför kan man påstå att läroböcker erbjuder både lärarna och eleverna de iscensatta lärandeobjekten. Lärarna kan få råd om vilka dimensioner av variation som är viktiga att behandla under sina lektioner. Om läraren finner brister i läroboken kan hon lägga till och behandla flera dimensioner under lektionerna för att komplettera bristerna. Eleverna får, med eller utan lärarens hjälp, uppleva olika dimensioner av variation om ett lärandeobjekt genom att läsa förklaringar, följa exempeluppgifter och arbeta med uppgifter i läroboken. Ju fler dimensioner av variation om ett lärandeobjekt eleven erfar i läroboken, desto kraftigare kunskaper får eleven att möjlighet att skaffa sig.

I detta arbete har jag ställt två forskningsfrågor. Den första rör läroböckernas tillvägagångssätt att hantera och utveckla bråk- och proportionsbegreppen, den andra vilka dimensioner av variation som erbjuds samt vilka representationsformer som används i böckerna. För att kunna besvara dem, presenteras likheter och skillnader angående bråk- respektive proportionsbegrepp mellan den svenska läroboken och den japanska.

7.1 Likheter och skillnader angående bråkbegrepp

När man studerar *Tabell 2. Kronologisk genomgång av läroböcker* (bilaga 1), kan man konstatera att både den svenska och japanska läroboken behandlar nästan likadana objekt inom bråkbegreppet i samma ordning, även om eleverna lär sig dem i olika årskurser. Allmänt behandlar den japanska läroboken bråk och bråkräkning ett till två år tidigare än den svenska. Eleverna i båda länderna börjar med att fördela jämt ett antal föremål eller en kvantitet, som en figur, en frukt eller en remsa, innan de börjar med bråkbegreppet. Läroböckerna visar först vad bråk är och hur man tecknar ett bråktal. Sedan tas det upp att jämföra storlekarna hos olika bråktal, bråk som är större än 1 och bråk i blandad form. Av de fyra räknesätten för bråktal, börjar eleverna i båda länderna med addition och subtraktion av två bråktal med samma nämnare. Innan de fortsätter med addition och subtraktion av bråktal med olika nämnare, arbetar de förkortning och förlängning av bråktal för att sedan kunna addera och subtrahera dessa. Till sist behandlar läroböckerna multiplikation och division av ett bråktal med ett heltal, och ett bråktal med ett annat bråktal.

Objekten som behandlas är ungefär likadana i båda länderna, men angående på vilka sätt läroböckerna behandlar vilka dimensioner av variation, finns det ansenliga skillnader. En av de största skillnaderna är upplägget för att presentera ett nytt lärandeobjekt och sedan att hantera detta. I den svenska läroboken börjar ett nytt avsnitt med definition av ett nytt objekt eller/och presentation av räkneproceduren på ungefär en halv till en sida. Här tas väsentliga egenskaper av objektet upp, och begreppsdefinitioner samlas ofta i ett och samma ställe. Detta innebär att många nya begrepp kan koncentreras till en halv till en sida som sammanfattning. Ett exempel är en storleksjämförelse mellan 1/3 och 1/6, som förklaras med bilder av chokladkakor (Se 6.4.1). Här kan man diskutera flertals dimensioner av variation inom bråk: hel och delar, del av en hel, del av antal rutor, hur man delar kakan, osv. Däremot är förklaringen i boken endast på en rad, som innehåller två påståenden: ”En tredjedels kaka är mer än en sjättedels kaka. Därför är talet 1/3 större än 1/6”. I den svenska läroboken fattas det ofta en diskussion om sambandet mellan det nya begreppet och vad boken behandlat tidigare. Om eleverna får uppleva olika dimensioner av variation beror mycket på hur läraren hanterar och diskutera dessa under lektionerna.

I den svenska läroboken ersätts brister i diskussionen om variation med övningsuppgifter. Uppgifter är välgjorda och varierande, speciellt C-uppgifter och fördjupnings- och diskussionsuppgifter, för att kunna förstärka elevernas begreppsförståelse för objektet som boken precis behandlat. Man kan sammanfatta det som så, att svenska elever erfar variation av ett matematiskt objekt genom att själv lösa varierande uppgifter med hjälp av lärares instruktioner och/eller begreppsförklaring i boken. Det innebär att om läraren inte instruerar eller hjälper eleverna på ett tillfredsställande sätt, kan de gå miste om väsentlig begreppsförståelse. Dessa uppgifter är oftast problemlösningar som kräver elevernas friare matematiska tänkande, och därför ger uppgifterna eleverna utmärkta tillfällen att fundera och upptäcka kritiska egenskaper i objektet. Angående representationer som används i den svenska läroboken, är det vanligt med skrivna ord, bilder av olika konkreta föremål som t ex delat äpple, pizza, cirklar, eller rutor, och matematiska symboler. När ett objekt är komplicerat som multiplikation/division av bråktal, blir de mer beroende av skriftliga förklaringar av beräkningsprocedurer utan visuella representationer.

I den japanska läroboken börjar ett avsnitt med ett problem eller en laborationsuppgift som har något samband med verkligheten och i det vardagliga livet. Detta ska diskuteras ett steg i taget, och eleverna arbetar med olika egenskaper av objektet genom att fylla i luckor av beräkningarna eller tabellerna. Eleverna har arbetat med problemet genomgående innan en begreppsdefinition presenteras. Detta innebär att eleverna antagligen lättare tar till sig det nya objektet eftersom de redan har diskuterat och funderat kring det objekt de skulle lära sig om. Begreppsdefinitioner är invävda bland övningarna, och även definitionerna förklaras ofta stegvis. Den japanska läroboken verkar vara uppbyggda med syften på att eleverna ser ett objekt med subtila detaljer som är egenskaper hos objektet.

Här tar jag upp som ett exempel division av bråk, som anses vara svårt både begreppsligt och räkneprocedurmässigt (se *bild 6* och *bild 14*). Räkneprocedurerna är presenterade i princip likadant i Sverige och Japan, och båda nämner varför man multiplicerar med ett inverterat bråktal vid division. Men i den svenska läroboken förklaras endast räknemetoden och proceduren med hjälp av förlängning med ett inverterat tal. Först i C-uppgifterna kopplas division av bråktal till textuppgifter, alltså verkliga situationer där division av bråktal kan utnyttjas. Den japanska motsvarigheten tar däremot först upp ett problem (målningsproblem), kopplar detta till räknesättet som boken behandlat tidigare, tecknar beräkningen med matematiska symboler, och till sist diskuteras två olika tankesätt för att utföra denna division. Sammanfattningsvis generaliseras räkneregeln vid division av bråk med pre-algebraiska symboler. Hela proceduren med hur man kopplar sin tanke till matematiska symboler som en beräkning är lika viktigt som själva räkneproceduren i den japanska läroboken.

En annan viktig skillnad på hur läroböcker hanterar olika objekt mellan svenska och japanska läroböcker är hur man kopplar heltalsuppfattning/räkning till bråkbegreppet. I den svenska läroboken hanteras bråk som ett individuellt objekt som är skiljt från heltal som eleverna är vana vid. Bråk beskrivs med en tydlig koppling till decimaltal och procent, men inte till naturliga tal. I den japanska läroboken kopplas bråk, speciellt bråkräkning, till heltalsräkning vid olika tillfällen. Exempelvis förklaras naturliga tal i bråkform som 6 = 6/1, vilket ger eleverna en möjlighet att inse att naturliga tal är en del av rationella tal. Vid bråkräkning presenterar boken ett tankesätt som eleverna kan utnyttja i många situationer, nämligen att tänka på ett tal som är konstruerats som ”en bas” gånger heltal. T ex 0,2 är två stycken 0,1 (0,1 som bas), eller 2/5 är två stycken 1/5 (1/5 som bas), och de kan då utnyttja heltalstänkande 2 + 3 för en uträkning 0,2 + 0,3 eller 2/5 + 3/5 (se s.29). Detta tankesätt kan man se också vid multiplikation och division av bråktal och heltal. I samband med multiplikation av bråktal ger boken eleverna tillfälle att upptäcka att räkneregler som kommutativa lagen och distributiva lagen också gäller bråkräkning.

Den svenska läroboken börjar behandla faktorisering av tal i år 3 och år 4, men övningarna till detta försvinner sedan i högre årskurser och tas upp igen endast som fördjupningsuppgift i år 7. Detta innebär att elever som inte hinner med att arbeta med dessa har förmodligen inte har möjligheter att lära sig om primtal och faktorisering av naturliga tal om läraren inte tar upp och diskuterar detta under lektionerna. Den japanska läroboken behandlar faktorisering av naturliga tal först i år 9, då faktorisering blir aktuellt i samband med andragradsekvationer. Däremot före år 9 arbetar japanska elever mycket med bråkräkning, som i sin tur kräver förkortning och förlängning av talen. Heltalsuppfattning angående gemensamma multipeln och gemensamma delaren verkar vara en viktig del i den japanska läroboken. Detta är antagligen inte bara för att eleverna ska lära sig förkunskaper till förkortning och förlängning av bråk, utan också för att ge eleverna möjlighet att förstå dessa egenskaper hos naturliga tal. Den svenska läroboken tar upp den minsta gemensamma nämnaren i år 9, men detta behandlas endast som ett verktyg för att kunna utföra addition/subtraktion av bråktal.

Bråk behandlas som en mindre del av matematiken i grundskolan i Sverige. Förståelsen av bråk är viktig i den svenska läroboken med avseende på att det behövs för att förstå decimaltal och procent, som verkar vara viktigare i svensk matematikundervisning. Bråk är inledning till decimaltal och procent som anses vara mer användbara i vardagliga livet. Att förstå ett grundläggande bråkbegrepp är viktigt i svenska skolan, men det verkar som räkneoperationer av bråktal inte är nödvändig kunskap för eleverna att lära sig, antagligen på grund av att det är komplicerade och mödosamma.

7.2 Likheter och skillnader angående proportionsbegrepp

Gällande hur proportionsbegreppet hanteras finns det ansenligt stora skillnader mellan svenska och japanska läroböcker. Den svenska läroboken tar inte upp det i ett enskilt kapitel eller avsnitt förrän i år 6 då eleverna lär sig procent. Naturligtvis betyder detta inte att den svenska läroboken inte behandlar proportionsbegreppet tidigare. Det finns övningar om figurmönster och talmönster redan i lågstadiet, även om det endast förekommer i en liten skala. De flesta uppgifter som handlar om proportion och förhållande finns under ”diskussionsuppgift”, ”problemlösning” och dels i ”C-uppgifter” i de lägre årskurserna, och de verkar vara utmanande uppgifter för eleverna. Dessa kategorier av uppgifterna däremot tillhör som något ”extra” och man arbetar med dessa när man hinner eller när man vill jobba mer, och det är inte något som lärare prioriterar under lektionerna. Detta innebär att läroböcker hanterar proportion och förhållande endast uppgiftsform utan begreppsliga förklaringar före år 6.

De största områdena som den svenska läroboken behandlar proportionsbegrepp inom är procent, följd av jämförelsepris, skala (inkl. förstoring och förminskning) och hastighet. I år 9 börjar eleverna arbeta med proportionalitet, linjära funktioner och likformighet. Upplägget av begreppspresentationer och förklaringar är likadant som motsvarigheten för bråkbegreppet: först begreppsförklaringar och/eller räkneprocedurer som sammanfattning i början av ett avsnitt och sedan följer många övningsuppgifter. När det gäller vilka representationer som används för att förklara proportionsbegreppet, används bilder i ett inledande avsnitt av procent och i skala, och linjediagram utnyttjas för hastighet. För proportionalitet används värdetabeller och koordinat-system. Tabeller eller tallinjer förekommer inte för att förklara begreppet proportion. Representationer är oftast begränsade till texter och matematiska symboler.

Den japanska läroboken behandlar knappast proportionsbegreppet förrän i år 4, men efteråt tar det upp olika proportionsbegrepp i ett par kapitel om året regelbundet. Först behandlas ett förhållande mellan två tal i olika situationer i år 4. Förhållande och andel, där procent ingår, behandlas i år 5. Från och med år 6 tar läroböcker upp proportionella samband, och ju högre årskursen blir ju mer systematiskt och mer avancerat blir innehållet. Det används många olika representationer för att förklara proportionsbegreppet, som tabeller, tallinjer och diagram tillsammans med text samt matematiska och (pre-)algebraiska symboler. Speciellt används tabeller flitigt för att sortera informationen i ett problem och att jämföra sambandet mellan två tal som samvarierar (variabler).

En intressant skillnad som jag vill ta upp är symbolen ”**:**” för att visa proportion mellan två tal. I Sverige används symbolen endast i samband med *division*, *skala* (förstoring och för-minskning) och *förhållandet* i en liten del i problemlösning med ekvationer. Det finns inget uttalat samband mellan dessa begrepp. Jag antar att här finns det en risk att en elev kan tro att symbolen ”**:**” kan användas i olika sammanhang utan att koppla det ena till det andra. I Japan behandlar symbolen redan från början med syftet att visa ett förhållande mellan två tal. När det är dags att arbeta med förminskning/förstoring som är uttryckt med symbolen ”**:**”, har eleven antagligen aning om att det handlar om proportion och denna symbol visar förhållandet mellan två saker, i detta fall två figurer i storlek. Den japanska läroboken behandlar dessutom en annan egenskap hos förhållande: att förhållandet är detsamma även om man multiplicerar/dividerar båda talen med samma tal. Detta påminner om regeln om olika bråk med samma värde: man får samma värde när man multiplicerar/dividerar täljaren och nämnaren med samma tal. Från och med år 8 utvecklar läromedlet behandlingen av andra regler om förhållande algebraiskt.

En annan aspekt som den japanska läroboken visar är att det ständigt uppmuntrar eleven för att hitta en regel eller att generalisera denna regel på olika sätt. Ett typiskt exempel är att man generaliserar reglerna, inte bara med text, utan också med symboler som ▲ eller ○ redan i mellanstadiet. Detta gäller inte bara för proportionsbegreppet, utan också för bråk-beräkning. Dessa pre-algebraiska symboler i mellanstadiet ersätts med bokstäver i högstadiet.

I Sverige behandlas procent och skala i en karta som viktiga objekt i Sverige, men dessa upptar väldigt lite utrymme i den japanska läroboken. I Japan behandlas de enbart under en liten del av ”Förhållande och andel”, och likaså behandlas jämförelsepris och hastighet under ett gemensamt avsnitt ”Storlek per enhet”. På det sättet kategoriserar den japanska läroboken olika matematiska objekt enligt dess matematiska egenskaper, och det visar tydligt att de objekt som ser skilda ut har i princip samma grundtanke och att de har samband med varandra.

Förklaringar i den svenska läroboken verkar fokusera på att eleverna ska kunna olika beräkningar som verktyg. På s 26 har jag visat två citat angående förhållandet i bråkform, som förklarar hur man utnyttjar förhållandet i bråkform för att räkna ut en viss andel. Eleverna kan förmodligen använda denna metod som ett verktyg för att lösa ett problem, men förklaringarna är kortfattade och det är tveksamt om eleverna får tillräcklig begreppslig förståelse. Denna tendens som kortfattade koncentrerade förklaringar i den svenska läroboken kan man också se inom proportionalitet. I Japan undersöks ett proportionellt samband genom att kontrollera variabler, fylla i tabeller och rita ett diagram för att komma fram till egenskaper hos proportionalitet. Man ska sammanfatta begreppet inte bara med text utan också med pre-algebraiska eller algebraiska symboler. Man kan se avsikt av boken att förståelsen av proportionalitet så småningom utvecklas till kunskaper om funktionslära. Proportionalitet arbetar japanska elever med i tre år från år 6 till år 8. I den svenska läroboken tas proportionalitet upp endast i år 9, och begreppsförklaringar beträffande proportionalitet upptar endast fyra sidor (tre av dessa finns i bilaga 2).

Det kan sammanfattas att den svenska läroboken endast hanterar några dimensioner av variation inom proportionsbegreppet och framhåller dessa som skilda matematiska objekt. De objekt som behandlas är antagligen utvalda enligt hur vardagsnära och användbara dessa objekt är. I den japanska läroboken är proportionsbegreppet ett viktigt område i matematikämnet i mellan- och högstadiet. Området kan uppdelas i två stora grupper: förhållande mellan två tal och proportionellt samband mellan två variabler. Olika objekt inom dessa grupper behandlas från olika synvinklar i ett par kapitel varje årskurs. För att kunna jämföra samband mellan två tal eller variabler, används tabeller, tallinjer och diagram flitigt samt text och matematiska, pre-algebraiska och algebraiska symboler.

7.3 Avslutande kommentarer och förslag till fortsatt forskning

Denna undersökning har visat på skillnader kring hur den svenska läroboken och den japanska presenterar och utvecklar ett matematiskt objekt. Angående bråkbegreppet hanterar den svenska läroboken likadana lärandeobjekt som den japanska, men betydligt färre objekt vad gäller proportionsbegreppet. Beträffande vilka matematiska objekt som tas upp i en lärobok, har den svenska läroboken ett annorlunda fokus än den japanska. Det verkar som de objekt som är mer användbara och praktiska upptar mer plats i den svenska läroboken. Den svenska läroboken har många övningsuppgifter där eleven kan uppleva flera dimensioner av variation, men då behöver eleven antagligen hjälp av läraren för att kunna förstå dessa dimensioner. Om man tittar närmare på ett enda objekt, visar den japanska läroboken flera dimensioner av variation på objektet. Den japanska läroboken verkar sträva efter att ge eleverna möjlighet att fundera på olika kritiska aspekter av objektet, att koppla det till vad de redan lärt sig och att hitta generella regler och uttrycka dessa med olika representationer.

Som jag nämnt tidigare har ett väldigt stort område hanterats i denna uppsats. På grund av utrymmes- och tidsbrist, har jag inte kunnat fokusera så mycket på olika dimensioner av variation av ett enda matematiskt objekt som jag hade hoppats på. Som ett förslag till fortsatt forskning skulle det vara intressant att undersöka vilka dimensioner av variation en lärare visar under sin lektion för ett matematiskt objekt, helst gärna ur ett internationellt perspektiv. I detta fall ingår också sociala interaktioner mellan läraren och eleverna, eller eleverna sinsemellan, i forskningen, och dess påverkan på elevernas inlärning. Ett annat förslag är att på lektioner i svensk skola tillämpa den procedur som den japanska läroboken visat i denna undersökning och undersöka hur detta påverkar elevers inlärning.

Referenser

Adjiage, Robert & Pluvinage, Francois (2007). An experiment in teaching ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics*, *65*, 149–175.

Akita kommun (2010). *Statistik ang. invånarantal i Akita.* Hämtad 2010-03-10 från http://www.city.akita.akita.jp/city/pl/mn/statistics/default.htm

Andreasson, Fredrik & Palm, Karl. (2010). *Undervisning av geometrisk talföljd och summa ur ett variationsteoretiskt perspektiv.* Examensarbete. Malmö högskola.

Behr, Merlyn. J, Harel, Guershon., Post, Thomas & Lesh, Richard. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws (Eds.), *Handbook of Reserch on Mathematics Teaching and Learning*, (pp.296-333). New York: Macmillan.

Brenner, Mary E., Herman, Sally, Ho, Hsiu-Zu, & Zimmer, Jules M. (1999) Cross-National Comparison of Represetational Competence. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(5), 541-557.

Carpenter, Thomas P., Fennema, Elizabath & Romberg, Thomas A. (1993). Toward a unified discipline of scientific inquiry. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers – An integration of research*, (pp.1-12). New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Delaney, Sean, Charalambous, Charalambos Y., Hsu, Hui-Yu, & Mesa, Vilma (2007). The treatment of addition and subtraction of fractions in Cypriot, Irish, and Taiwanese textbooks. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conf. of the Int'l Group for the Psychology of Math. Edu*,*2*,193-200.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Empson, Susan B. (1999) Equal sharing and shared meaning: The development of fraction concepts in a first-grade classroom. *Cognition and Instruction*, *17*(3), 283-342.

Fan & Shu (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 61-75.

Hagland, Kerstin, Hedrén, Rolf & Taflin, Eva (2005). *Rika matematiska problem*. Stockholm: Liber.

Hiebert, J. & Stigler, J. W. (2000). A Proposal for Improving Classroom Teaching: Lessons from the TIMSS Video Study. *The Elementary School Journal*, *101*(1), 1-17.

Hiebert, James & Stigler, James W. (2004). A world of difference – Classrooms abroad provide lessons in teaching math and science. *JSD, 25*(4), 10-15.

Häggblom, Lisen & Hartikainen, Siv (2006). *Tänk och Räkna 1 a & b*, Malmö: Gleerups.

Häggblom, Lisen & Hartikainen, Siv (2006). *Tänk och Räkna 2 a & b*, Malmö: Gleerups.

Häggblom, Lisen & Hartikainen, Siv (2006). *Tänk och Räkna 3 a & b*, Malmö: Gleerups.

Häggström, Johan (2008a). *Teaching system of linear equations in Sweden and China: What is made possible to learn?* Göteborg: Göteborgs universitet.

Häggström, Johan (2008b). Kursmaterial. Hämtad 2010-02-01 från *www.ped.gu.se/personal/johan.haggstrom/lskursokt08.pdf*

Helmertz, Tomoko (2007). *Problemlösning – En jämförelse mellan svensk och japansk undervisning.* Examensarbete. Malmö högskola.

Kieren, Thomas E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research*, (pp.49-84). New Jersey: Erlbaum.

Kiselman, Christer & Mouwitz, Lars (2008). *Matematiktermer för skolan.* Göteborg: NCM.

Lamon, Susan J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning – toward a theoretical framework for research. In Frank K. Lester Jr. (Eds.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp.629-666). National council of teachers of mathematics. Charlotte, NC : Information Age Publishing Inc.

Lesh, Richard, Behr, Merlyn & Post, Tom. (1987) Rational number relations and proportions. In C. Janivier (eds.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, (pp.41-58). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lesh, Richard, Post, Tom & Behr, Merlyn (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janivier (eds.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, (pp.33-40). New Jersey: Erlbaum.

Leung, Frederick K. S. (2001). In search of an East Asian identity in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,47*, 35-51.

Lo, Mun L. & Ko, Po Y. (2002). The 'enacted' object of learning. In F. Marton & P. Morris (Eds.), *What matters? Discovering critical conditions of classroom learning*, (pp.59-74). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Ma, Liping. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Marton, F. & Booth, S. (2000). *Om lärande.* Lund: Studentlitteratur.

Marton, Ferrence, Runesson, Ulla & Tsui, Amy B. M. (2004). The space of learning. In F. Marton & A. B. M. Tsui (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning* (pp.3-40). New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Mayer, R. E., Sims, V., & Tajika, H. (1995). A comparison of how textbooks teach mathematical problem solving in Japan and the United States. *American Educational Research Journal, 32*, 443–460.

Pepin, Birgit (2008). *Mathematical tasks in textbooks: Developing mathematical tool based on 'connectivity'*. Hämtad 2010-02-01 från http://dg.icme11.org/document/get/245

Pepin, Birgit and Haggarty, Linda (2008). *Making connections and seeking understanding: Mathematical tasks in English, French and German textbooks*. Hämtad 2010-02-01 från http://www.maths-ed.org.uk/mkit/MKiT5_Pepin&Haggarty.pdf

Pitketyly, Anne & Hunting, Robert (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *30*, 5-38.

Pong, Wing Y. & Morris, Paul (2002). Accounting for differences in achievement. In F. Marton & P. Morris (Eds.), *What matters? Discovering critical conditions of classroom learning* (pp.9-18). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Ponte, J. P. da, & Marques S. (2007) *Proportion in school mathematics textbooks*. Working Group 15 CERME 5. Hämtad 2010-01-25 från http://ermeweb.free.fr/CERME5b/WG15.pdf

Prediger, Susanne (2006). The relevance of didactic categories analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and instruction, 18*, 3-17.

Runesson, Ulla. (1999). *Variationens pedagogik: skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Runesson, Ulla & Marton, Ferrence (2002). The object of learning and the space of variation. In F. Marton & P. Morris (Eds.), *What matters? Discovering critical conditions of classroom learning*, (pp.19-37). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Runesson, Ulla & Mok, Ida. A. C. (2004). Discernment and the question, "What can be learned?". In F. Marton & A. B. M. Tsui (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning*, (pp.63-87). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Runesson, Ulla & Mok, Ida. A. C. (2005). The teaching of fractions – a comparative study of a Swedish and a Hong Kong classroom. *NOMAD*, *10* (2), 1–15.

Sawada, Toshio & Sakai, Yu (2009a,b&c). *Chuugaku Suugaku 1,2 & 3.* Tokyo: Kyoiku Shuppan.

Sawada, Toshio & Okamoto, Kouji (2009a&b). *Shogaku Sansuu 1 a&b*. Tokyo: Kyoiku Shuppan.

Sawada, Toshio & Okamoto, Kouji (2009c&d). *Shogaku Sansuu 2 a&b*. Tokyo: Kyoiku Shuppan.

Sawada, Toshio & Okamoto, Kouji (2009e&f). *Shogaku Sansuu 3 a&b*. Tokyo: Kyoiku Shuppan.

Sawada, Toshio & Okamoto, Kouji (2009g&h). *Shogaku Sansuu 4 a&b*. Tokyo: Kyoiku Shuppan.

Sawada, Toshio & Okamoto, Kouji (2009i&j). *Shogaku Sansuu 5 a&b*. Tokyo: Kyoiku Shuppan.

Sawada, Toshio & Okamoto, Kouji (2009k&l). *Shogaku Sansuu 6 a&b*. Tokyo: Kyoiku Shuppan.

Saxe, Geoffrey B., Taylor, Edd V., McIntosh, Clifton & Gearhart, Maryl (2005) Representing Fractions with Standard Notation. *Journal for Research in Mathematics Education. 36*(2), 137 -157.

Skolverket (2009). Bråk och decimaltal. In *Diamant – Nationella diagnoser i matematik*. Hämtad 2009-12-01 från http://www.itis.gov.se/content/1/c6/01/46/94/Diagnos_Matematik_br%E5k.pdf

Son, Ji-won (2005). A comparison of how textbooks teach multiplication of fractions and division of fractions in Korea and in the U.S. Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conf. of the Int'l Group for the Psychology of Math. Edu.*,*4*, 201-208.

Son, Ji-won & Senk, Sharon L. (2010). How reform curricula in the USA and Korea present multiplication and division of fractions. *Educational Studies in Mathematics*,*74*(2), 117-142.

Undvall, Lennart; Forsberg, Svante & Melin, Christina. (2005) *Matematikboken 4*. Stockholm: Liber/Almqvist & Wiksell.

Undvall, Lennart; Forsberg, Svante & Melin, Christina. (2006) *Matematikboken 5*. Stockholm: Liber/Almqvist & Wiksell.

Undvall, Lennart; Forsberg, Svante; Melin, Christina & Johnson, Kristina (2007) *Matematikboken 6*. Stockholm**:** Liber/Almqvist & Wiksell.

Undvall, Lennart; Olofson, Karl-Gerhard; Forsberg, Svante & Johnson, Kristina (2006). *Matematikboken X*. Stockholm:Liber/Almqvist & Wiksell.

Undvall, Lennart; Olofsson, Karl-Gerhard & Forsberg, Svante (2002). *Matematikboken Y Röd.* Stockholm:Liber/Almqvist & Wiksell.

Undvall, Lennart; Olofsson, Karl-Gerhard & Forsberg, Svante (2003). *Matematikboken Z Röd.* Stockholm:Liber/Almqvist & Wiksell.

Wikipedia (2010). Hämtad 2010-04-01 från http://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%9D%92

Winsløw, Carl (2004). Quadratics in Japanese. *NOMAD 1*, 51-74.

Bilaga 1

Tabell 1. Antal sidor och uppgifter i svenska resp. japanska läroböcker

	Svenska läroböcker		*Japanska läroböcker*	
	Antal sidor (med läxsidor)	**Antal uppgifter (utan läxor)**	**Antal sidor**	**Antal uppgifter**
år1	240	267	111	139
år2	260	406	162	305
år3	263	396	176	366
år4	285	1290	191	398
år5	320	1311	174	348
år6	320	1257	157	311
år7	384	1312	191	326
år8	368	1373	183	279
år9	368	1194	175	332
summa	**2808**	**8806**	**1520**	**2804**

Bilaga 2 *Tabell 2 Kronologisk genomgång av läroböcker*

År	Svenska läroböcker	Japanska läroböcker
1		
2	***Jämnfördelning*** upp till fyra stycken ***Klocka*** (halv, kvart) ***Cirkelsektor*** till en hel cirkel	
3	4st glass kostar 20 kr, hur mycket för 5st? ***Division*** (***divisionstecken /*** , ordet ”***kvot***”, ***divisionstecken :***) ***Faktorisering med tal*** ___ · ___ = 180 Uttryck ”***faktor***” 4 · ___ = 240	***Jämnfördelning med 4st eller 4 personer*** (med bilder, olika sätt att dela i 4) ***Divisionstecken ÷ och ---*** termer för talet som delas och talet som delar med
4	***talmönster*** vad är nästa tal 7 14 21 28 __, 1 3 6 __ 15, 1 2 4 8 16 __ ***Division med divisionsstreck – täljare/nämnare = kvot*** $\frac{15}{3}$ = 5 ***Proport***. recept – ***dubblera*** portionen Vad får du betala för 2kg bananer om 5kg kostar45 kr? ***1:a, 2:a, 3:e & 4:e kvartalet*** ***Cirkeldiagram*** (***halvcirkel***, ***kvartscirkel***) ***Faktorisering***: ge två förslag på tal som kan stå i rutorna ___ · ___ · ___ = 24 ***Storleksjämförelse av kvot*** $\frac{274}{2}$ $\frac{876}{4}$ $\frac{634}{3}$ $\frac{585}{5}$ ***Storleksjämförelse av bråk*** Vilket är störst en tredjedel el. en fjärdedel av tårta? ***Sidlängdförlägning av kvadrat***: Hur stor omkrets har en kvadrat med dubbelt så långa sidor? ***Mönster*** hur många bänkar till lång bord ***Literpris***: Vilken olja billigast per liter?	***Bråk ¼*** m, termer ***nämnaren täljare med förklaring*** Term ”***jämnfördela***” ***Delar till en hel*** ”Hur många $\frac{1}{3}$ går i en hel?” ***Jämförelse av storlek*** $\frac{7}{10}$ och $\frac{8}{10}$ ***Bråk av mått(längd, vikt)*** ***Bråk och decimalform*** 0,1 liter = $\frac{1}{10}$ liter term ”***en tiondel***” ***Söker en faktor genom division*** ___· 3 = 84 ___ = $\frac{84}{3}$ ***Bråk som är större än 1*** (blandad form) Storleksjämförelse mellan olika bråkform ***Samband*** *mellan längd och bredd i rektangel om omkretsen är 18cm.* ***- tabell och linjediagram*** ***Mönster – (proportionell ökning)***
5	***Bråk – del och hel*** ”två halvor lika med en hel” ” fyra fjärdedelar lika med en hel” ***Storleksjämförelse*** vilket är störst 1/6 1/3 ***Bråkform och decimalform*** (omvandling mellan varandra) ***“sju tiondelar”*** ↔ $\frac{7}{10}$ ***Förhållande på area*** av rektangeln och triangeln ***Skala 1:10*** 1 står för längd på bilden och 10 för längd i verkligheten ***Volym*** ½ liter = 0,5 liter ***Vikt*** 1hg = 1/10 kg = 0,1 kg ***Jämförelsepris*** hur mycket kostar 1,5kg	***Decimaltal*** med hundradel, tusendel, osv ***Mönster*** och omkrets av en figur ***Addition och subtraktion av bråktal med samma nämnare*** ***Lika värde som ½, 1/3,*** ***Storleksjämförelse ½, 1/3, ¼, 1/5...*** ***Addition och subtraktion av blandad form med samma nämnare*** Area av triangel, parallellogram, romb och parallelltrapets ***Samband mellan division och bråktal ”man kan uttryck division i bråkform”*** ***bråktal och decimaltal*** ***Naturligt tal i bråkform (nämnaren: 1)***

	bananer om de kostar 14kr/kg?	***Decimaltal i bråkform (0,207 = 207/1000)*** ***Addition av decimaltal och bråktal*** term***: andel*** ***Procent*** : andel i hundradel 1% = 0,01 ***Antalet = antalet av det hela · andel*** ***20% rabatt***: 2olika sätt att räkna ut ***förändringsfaktor:*** 5% moms – 1 + 0,05 = 1,05 av det första priset ***Andel och cirkeldiagram***: räkna ut andelar och rita cirkeldiagram
6	bråk – ***del av hel*** $1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3}$, 1 = 6/□ ***Hur stor del av figuren?*** en rektangel delad i olika figurer med olika färger ***Omkrets av en cirkel/rektangel*** – tre fjärdedelar av omkretsen $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ (rita en bild) ***del av antal*** (1/5 av 20 kr, 4/5 av 25m) ***bråk i blandad form*** (bild av cirklar) ***klocka – en fjärdedelsvarv, en tredjedelsvarv*** Hur stor del av ett dygn är 3 h? ***Storleksordning mellan olika bråktal och decimaltal*** ***Procentform*** – ½ = 50%, ¾ = 75% ***Skala*** 1:1, 1:2, 1: 500 000	***Den minsta gemensamma multipeln*** ***Den största gemensamma dividend*** ***Jämförelse av olika bråktal med olika nämnare*** ***Förkortning*** av bråktal ***Förlängning av två bråktal*** ***Addition och subtraktion*** av bråktal med olika nämnare ***Bråk och klocka*** ***Storlek per enhet*** (folktätheten, bensin-förbrukning, literpris) ***Hastighet*** ***Multiplikation och division av 1)bråktal och heltal 2) två bråktal*** ***Förhållande*** 200ml och 300ml – 2:3 (skala i en karta), 7:5:3 ***Proportion*** ex Vattenmängd i badkaret ökar med tiden, ***Proportionalitet och diagram***
7	***Hastighet v = s / t*** ***Linjediagram*** att läsa av medelhastighet Skala ”***förminskning och förstoring***”, ***2:1*** ***Klocka och vinklar*** ***Bråk – förkortning*** 4/8 = 2/4 = ½ ***Jämför bråk med olika hela*** ***Tallinje med olika bråktal*** ***Mönster och bråk*** ***0,7 + ¾ + 1,2*** ***Addition och subtraktion med bråktal med samma nämnare (inkl blandad form)*** ¾ min = ____ sek, 4/5 av 2,5 hg ***Procent – delen/det hela*** ***Primtal och sammansatta tal 18= 2·9 = 2· 3· 3*** ***Mönster och hitta en regel***	***Division av algebraiskt uttryck*** ***Faktorisering av uttryck*** ***Förkortning/förlängning*** av ekvationer ***Proportionalitet, tabell och koordinatsystem***, $y = ax$ ($a \neq 0$) *a* kan vara ett negativt ***linjär funktion*** ***Omvänd-proportionalitet, tabell och diagram y=a/x*** cirkelsektorns omkrets och area ($\frac{v}{360}$)
8	***Förlängning av bråktal*** ***Addition och subtraktion med bråktal med olika nämnaren*** ***Minsta gemensamma nämnaren***	a(b+c) = ab + ac, $\frac{6x+9y}{3}$, $\frac{6ab}{\frac{2}{3a}}$

	Multiplikation och division av bråktal ***Procent – ränta och räntesatsen*** ***2,5/0,05 = 250/5*** ***Förhållandet = delen/det hela*** ***Cirkeldiagram med angivna Procentsatser*** ***Mönster och formel med n*** ***a(b+c) = ab + ac***	***Förhållande: a : b,*** $\frac{a}{b}$ ***a : b = c : d ↔ ad = bc*** Ekvationssystem : En av tre lösningsmetoder genom att multiplicera den ena ekvationen ***Linjär funktion y= ax + b*** *a* : *koefficient* ***a =*** $\frac{ökninga}{ökninga}$ Ekvationen 2x + y = 3 och funktionen y = -2x + 3 är samma linje i diagram ***Sannolikhet p = a / n***
9	***Sannolikhet - antalet gynnsamma utfall/antalet möjliga utfall*** ***Förhållande 7:3, 7x/3x = 7/3 = 7 : 3*** ***Likformighet – ta reda på skala*** ***Areaskala*** ***Topptriangelsatsen – ▲ADE ~▲ABC*** ***Linjära funktioner – funktion som formel*** ***Proportionalitet på linjära funktioner*** ***Andra funktioner som inte är linjära*** ***Skriv en formel med hjälp av en linjär funktion*** ***(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd*** (med hjälp av en rektangel delad i fyra rektanglar) ***ekvationer i bråkform***	***Faktorisering*** av algebraiskt uttryck genom konjugatregeln, parentesregeln, mm ***Faktorisering av naturliga tal*** ***Primtal*** – faktorisering med primtal $90=2\times3^2\times5$ ***Andragradsekvation*** – genom faktorisering ***Andragradsfunktion*** ***Likhet – förstoring och förminskning*** Ritning av en förstorad/förminskad figur ***Villkor till två figurer i likhet*** ***Likhets förhållande***(skala) ***1:3*** ***Skala i karta*** ***Topptriangelsatsen*** ***Satsen om parallella linjer***

Bilaga 3 *Tabell 3. Dimensioner av variation*

Dimensioner av variation
1. Presentation av bråkbegrepp
1.1 Jämnfördelning av saker med två eller flera personer
1.2 Jämnfördelning och division som operation (t ex 10/4, 2/3, 5/2)
1.3 Förklaring av del-hel relation
1.4 Relation mellan bråk och division; a delat med *b* (operation) ↔ *a/b*
1.5 Betydelse av bråkstreck, nämnaren och täljaren
1.6 Bråk som tal
1.7 Bråk som ett värde
1.8 Bråk som andel
1.9 Bråk som storheter (t ex ¼ liter, ½ år)
1.10 Del av en hel
1.11 Del av antal; en kvantitet av något
1.12 ”sju tiondelar” ↔ 7/10
1.13 Uttrycket ”1/3 av 6”
1.14 Begreppet ”en halv (1/2)”, ”en kvart (1/4)” och ”en hel (1/1, 1)”
1.15 Bråk som mått, en punkt på tallinjen
1.16 Bråk som kvot
1.17 Jämförelse av två eller flera bråktal (t ex Vilket är störst, 1/3 eller ¼?)
1.18 Bråk som är större än 1 (bråktal med täljaren som är större än nämnaren)
1.19 Bråktal i blandade form
1.20 Flera bråktal har ett och samma värde (t ex 2/5 = 4/10 = 10/25)
1.21 Jämförelse av två bråktal som har olika hela
1.22 Naturliga tal i bråkform (nämnaren 1) ex 3/1 = 3
1.23 *a/b* då b inte får vara 0
1.24 Bråk med decimaltal i nämnaren eller/och täljaren
1.25 Relation mellan bråktal och decimaltal
1.26 Relation mellan bråktal och procentsats
1.27 Andel och procent/andel och decimaltal
2. Bråk med räkneoperation
2.1 Addition/subtraktion av ett heltal och ett bråktal
2.2 Addition/subtraktion av två bråktal med samma nämnare
2.3 Addition/subtraktion av bråktal i blandade form
2.4 Addition/subtraktion av bråktal med olika nämnaren genom att omvandla till decimalform
2.5 1/3 + 1/3 ≠ 2/6
2.6 Talens delbarhet och primtal, faktorisering av tal

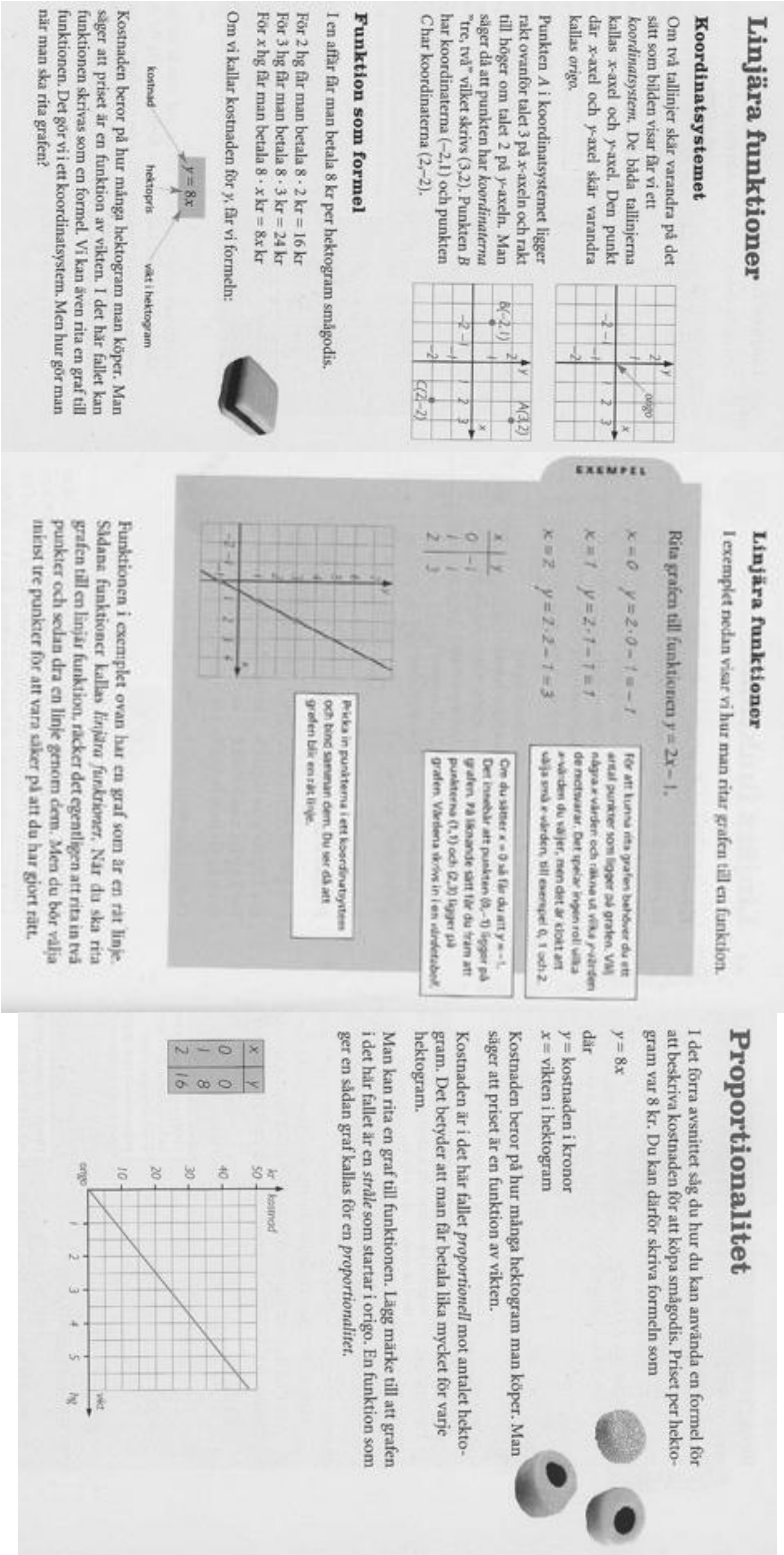
2.7 Förlängning/förkortning av bråktal
2.8 Addition/subtraktion av bråktal med olika nämnaren genom förlängning/förkortning (minsta gemensamma nämnaren)
2.9 Multiplikation av ett heltal och ett bråktal
2.10 Multiplikation av två (eller flera) bråktal
2.11 Multiplikation av två bråktal i blandade form
2.12 3/5 · 5/2 betyder 3/5 av 5/2
2.13 Division av ett heltal och ett bråktal
2.14 Division av två (eller flera) bråktal
2.15 Betydelse av multiplikation av två bråktal (t ex 1/3 · 2/5)
2.16 75/10 = 0,1 · 75
2.17 Multiplikation ger talet både mindre och större värde
2.18 Betydelse av division av två bråktal (t ex 2/5 delat med 1/3)
2.19 det inverterade värdet till 3 är 1/3
2.20 Division ger talet både mindre och större värde
3. Tillämpning av bråk
3.1 Klocka och dygn (t ex ½ h, 1/6 h, ¼ dygn)
3.2 Cirkeldiagram (en halv, en kvart)
3.3 Cirkeldiagram (andel och vinklar)
3.4 Förhållande mellan rektangels area och triangels area
3.5 Förhållande mellan en figur och en/flera uppdelade figur/-er i figuren
3.6 Förkortning av algebraiskt uttryck genom faktorisering
3.7 Förkortning/förlängning av ekvationer
3.8 Sannolikhet *P = antalet gynnsamma utfall/ antalet möjliga utfall*
4. Proportionsbegrepp
4.1 ”Dubblera”, ”tredubbla” ”1,5 gånger mer” av kvantitet (ex recept till bakning)
4.2 Talmönster
4.3 Mönster med figurer, hitta regler att räkna ut antal, formel
4.4 3/2 = ( )/6, att söka ett nytt värde om man vet ett förhållande mellan två saker och ett nytt värde på det ena
4.5 Storlek per enhet (t ex jämförelse pris, folktäthet, hastighet mm)
4.6 Beräkning av andel på 4.5
4.7 Proportion av två värden (t ex 200ml : 300ml ↔ 2 : 3)
4.8 Förhållande = delen/det hela
4.9 Likformighet
4.10 Skala i likformighet (förstoring och förminskning)
4.11 Skala på en karta
4.12 Längdskala, areaskala och volymskala (10 : 100 : 1000)
4.13 Topptriangelsatsen
4.14 $a : b \leftrightarrow$ förhållande a / b
4.15 $a : b = c : d \leftrightarrow ad = bc$

4.16 Begreppet proportionalitet – proportionell ökning/minskning
4.17 Proportionalitet och diagram
4.18 $y = kx$
4.19 Linjärfunktion: $y = kx + m$
4.20 $k = \Delta x / \Delta y$
4.21 Omvänd-proportionalitet y=k/x

Bilaga 4

Begreppsförklaring av linjära funktioner och proportionalitet i den svenska läroboken

(Undval, Olofsson & Forsberg 2003, s. 201,202 &205)



Linjära funktioner

Koordinatsystemet

Om två tallinjer skär varandra på det sätt som bilden visar får vi ett *koordinatsystem*. De båda tallinjerna kallas *x*-axel och *y*-axel. Den punkt där *x*-axel och *y*-axel skär varandra kallas *origo*.

Punkten *A* i koordinatsystemet ligger rakt ovanför talet 3 på *x*-axeln och rakt till höger om talet 2 på *y*-axeln. Man säger då att punkten har *koordinaterna* "tre, två" vilket skrivs (3,2). Punkten *B* har koordinaterna (–2,1) och punkten *C* har koordinaterna (2,–2).

Funktion som formel

I en affär får man betala 8 kr per hektogram smågodis.

För 2 hg får man betala 8 · 2 kr = 16 kr
För 3 hg får man betala 8 · 3 kr = 24 kr
För *x* hg får man betala 8 · *x* kr = 8*x* kr

Om vi kallar kostnaden för *y*, får vi formeln:

$y = 8x$

Kostnaden beror på hur många hektogram man köper. Man säger att priset är en funktion av vikten. I det här fallet kan funktionen skrivas som en formel. Vi kan även rita en graf till funktionen. Det gör vi i ett koordinatsystem. Men hur gör man när man ska rita grafen?

Linjära funktioner

I exemplet nedan visar vi hur man ritar grafen till en funktion.

EXEMPEL

Rita grafen till funktionen $y = 2x - 1$.

$x = 0 \quad y = 2 \cdot 0 - 1 = -1$
$x = 1 \quad y = 2 \cdot 1 - 1 = 1$
$x = 2 \quad y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

För att kunna rita grafen behöver du ett antal punkter som ligger på grafen. Välj några *x*-värden och räkna ut vilka *y*-värden de motsvarar. Det spelar ingen roll vilka *x*-värden du väljer, men det är klokt att välja små *x*-värden, till exempel 0, 1 och 2.

x	y
0	–1
1	1
2	3

Om du sätter *x* = 0 så får du att *y* = –1. Det innebär att punkten (0,–1) ligger på grafen. På liknande sätt får du fram att punkterna (1,1) och (2,3) ligger på grafen. Värdena skrivs in i en *värdetabell*.

Pricka in punkterna i ett koordinatsystem och bind samman dem. Du ser då att grafen blir en rät linje.

Funktionen i exemplet ovan har en graf som är en rät linje. Sådana funktioner kallas *linjära funktioner*. När du ska rita grafen till en linjär funktion, räcker det egentligen att rita in två punkter och sedan dra en linje genom dem. Men du bör välja minst tre punkter för att vara säker på att du har gjort rätt.

Proportionalitet

I det förra avsnittet såg du hur du kan använda en formel för att beskriva kostnaden för att köpa smågodis. Priset per hektogram var 8 kr. Du kan därför skriva formeln som

$y = 8x$

där
y = kostnaden i kronor
x = vikten i hektogram

Kostnaden beror på hur många hektogram man köper. Man säger att priset är en funktion av vikten.

Kostnaden är i det här fallet *proportionell* mot antalet hektogram. Det betyder att man får betala lika mycket för varje hektogram.

Man kan rita en graf till funktionen. Lägg märke till att grafen i det här fallet är en *stråle* som startar i origo. En funktion som ger en sådan graf kallas för en *proportionalitet*.

x	y
0	0
1	8
2	16

Bilaga 5

Ett problem angående bråkräkning i den japanska läroboken

(Sawada & Okamoto 2009l, s.9)

Bilaga 6

Ett problem angående proportionalitet i den japanska läroboken

(Sawada & Sakai 2009a, s.94-95)