# En kort redovisning av projektet
# ***mera matte på högstadiet ger mera matte på gymnasiet***

Under de senaste fem åren har vi, i samarbete med lärare i matematik på högstadiet, bedrivit en försöksverksamhet där vi uppmuntrat elever i Åk 9 att läsa gymnasiekursen Matematik A, MaA. När eleverna sedan kommit till gymnasiet har de fått chansen att börja läsa Matematik B direkt. Sten-Åke Bredmar har varit projektledare under åren 1999-2001 och Birger Andersson åren 2001-2004.

Då vi samtalade med några matematiklärare på högstadiet kom vi fram till att högstadiematten var så omfattande att det täckte stora delar av MaA och även delar av MaB. Vi startade ett samarbete!

Till en början gav vi bort våra gamla läroböcker i MaA till intresserade högstadieelever. Detta visade sig i längden vara ohållbart. Böckerna räckte inte till! Det visade sig också att elever, som började läsa MaA, tyckte det blev för jobbigt. MaA-boken var ganska tjock och avskräckande. Många hoppade av.

Eftersom högstadiekursen innehöll nästan allt som ingick i MaA så försökte högstadielärarna få eleverna att fördjupa sig i högstadiets matematikböcker. De få avsnitt som saknades lovade gymnasielärarna att ta upp på gymnasiet under höstterminen i Åk 1. Fler elever fullföljde då sina MaA-studier i högstadiet!

Vi kom på idén att göra ett komplementkompendium. Det innebar vissa kostnader i material och tid! Men det här med kompendium var intressant. Vi körde igång!

Hösten 2003 ansökte vi om ett stipendium från Gudrun Malmers Stiftelse. Vi blev mycket överraskade och glada då vi fick detta stipendium!

Efter besök på en träff för rektorer på högstadiet fick vi klartecken att ha några kompletterande föreläsningar i matematik för intresserade elever i åk 9. Skolorna betalade elevernas resor, vi bjöd på fika! 90 elever kom och vi blev överväldigade! Vi skrev några kompendier i A5-format med uppgifter som vi ansåg behövde betonas. Det blev fyra föreläsningar totalt.

Massor av elever läste ***mer matte på högstadiet*** under 2003-2004.

När vi öppnade portarna till våra två gymnasieskolor vid höstterminens start 2004 så valde 51 elever av 64 på Lars Kaggskolans TE-program att läsa ***mer matte på gymnasiet,*** alltså att börja med MaB. På Lars Kaggskolans NV-program satsade 62 elever i två klasser och Jenny Nyströmsskolans NV-program satsade 31 elever i tre klasser av skolornas totalt 160 på ***mer matte på gymnasiet.***

I oktober efter två månader insåg vi lärare att förkunskaperna hos några elever var alltför bristfälliga. Tre elever på TE och 15 elever på NV har därför bytt till MaA. Med en mer riktad undervisning från oss gymnasielärare där vi inledningsvis koncentrerar oss på svåra moment i MaA kommer fler elever att kunna börja och fortsätta med ***mer matte på gymnasiet***.

Under hösten får eleverna i åk 9 vårt kompletteringshäfte. Det kommer att delas ut vid föreläsningen den 25 november 2004.

Vi konstaterar med stor tacksamhet att stipendiet från Gudrun Malmers Stiftelse har inspirerat oss och varit en starkt bidragande orsak till att vi fortsatt arbetet med att utveckla MaA på högstadiet.

Vi vill framföra vårt stora och varma tack till Stiftelsen för stipendiet.

Kalmar den 8 november 2004

*Birger Andersson* *Sten-Åke Bredmar*

Bilagor
1. Betygstatistik
2. Arbetsgång
3. Utvärdering 6 september
4. Arbetsinsats
5. Presentationen på grh
6. Inbjudan till gymnasier
7. Elevkommentarer
8. Hur går vi vidare?

Bifogas även ett ex av kompletteringskompendiet **mera matte**

Vår hemsida finn på nätet. Adressen är **kagg.se**

Bilaga 1

# Utvärdering MaA, B och C

av TE- och NV-programmens elever vid Lars Kaggskolan i Kalmar

Vi jämför spetseleverna (de som hoppar över MaA) med övriga elevers betygsförändringar.
Vi registrerar de förändringar av betygen som eleven fått vid de nationella proven i MaA, MaB och MaC i förhållande till NP i åk 9 på högstadiet.

Här redovisas endast åk 2. Åk 1 redovisas senare.

Eleverna delas in i tre grupper:

- Betyget har *höjts* jämfört med åk 9
- Betyget är *lika* med åk 9
- Betyget har *sänkts* jämfört med åk 9

Grupp 1 redovisar förändringar hos TE-programmets elever (grupp 2 har ej läst färdigt MaC), därefter NV-programmets elever. Sista gruppen omfattar även elever från Jenny Nyström.

| Tabell | Grupp | Betygen | MaA | MaB | MaC |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | TE-spets | har höjts | 11 | 4 | 2 |
| | | är lika | 10 | 11 | 6 |
| | | har sänkts | 1 | 6 | 13 |
| | | | | | |
| 2 | TE-övriga | har höjts | 5 | 3 | |
| | | är lika | 18 | 10 | |
| | | har sänkts | 8 | 18 | |
| | | | | | |
| 3 | NV-spets | har höjts | 7 | 4 | 3 |
| | | är lika | 18 | 18 | 19 |
| | | har sänkts | 0 | 3 | 3 |
| | | | | | |
| 4 | NV-övriga | har höjts | 5 | 2 | 1 |
| | | är lika | 21 | 18 | 16 |
| | | har sänkts | 7 | 13 | 16 |
| | | | | | |
| 1+3 | Totalt spets | har höjts | 20 | 10 | 6 |
| | | är lika | 35 | 34 | 29 |
| | | har sänkts | 3 | 14 | 23 |
| | | | | | |
| 2+4+ | Totalt övriga | har höjts | 15 | 7 | 2 |
| Jenny | | är lika | 60 | 48 | 29 |
| | | har sänkts | 22 | 42 | 35 |

Undersökningen är genomförd vecka 3, den 12-16 januari 2004.

## Slutsats (se även bilaga 3)

Elevers betyg i MaA påverkas marginellt.
Elever sänker sina betyg i MaB (MaC) mer sällan på spetsutbildningen jämfört med övriga.
Elever påverkas positivt av att hoppa över MaA och börja läsa MaB direkt!!

*Birger Andersson*

Bilaga 2

# Detta blev vår arbetsgång för läsåret 2003-2004

Vi lyckades faktiskt genomföra nedanstående program!
Det var mycket roligt att göra högstadiebesök.
I början av 2004 fick vi besked om att vi fått ett stipendium av Gudrun Malmers Stiftelse. Sten-Åke och jag svävade på små moln och allt bara fungerade!

**Åk 9 vid högstadierna i Borgholm, Kalmar och Mörbylånga kommuner**

1. Utskick av inbjudan till projektet till mattelärare på högstadiet åk.9[1] — sept.
2. Besök på skolor för information m.m. 12 skolor — okt-jan.
3. Utskick av ”Högstadiematte + lite till = Matematik A” [1] — nov.
4. Fyra matteföreläsningar i storgrupp på gymnasieskolan — nov - april
5. Utskick av tre kapitelprov med lösningar [1] — feb.
6. Utskick av det Nationella provet i MaA från 1998, som övningsprov [1] — mars
7. Utskick av det Nationella provet i MaA från 1996, med vissa ändringar [2] — maj
8. Insamling av resultat. — juni

**Åk 1 på gymnasiet, NV – 65 st och TE – 28 st[3]**

Åk 1 läser spetseleverna *Mer matte* 150 p (MaB och MaC) och övriga 150 p (MaA och MaB) Undervisningen ligger parallellt.

9. NV- och TE-eleverna i åk 1 på Lars Kaggskolan och Jenny Nyströmskolan genomför ett diagnostiskt test och erbjuds placering i Mer matte-grupp dvs de börjar läsa MaB. — aug.
10. Eleverna läser MaB (50 p). De får under 8 veckor göra inlämningsuppgifter på MaA-kursen. — aug-nov.
11. Eleverna skriver NP i MaA (100 p) och NP i MaB (50 p) — dec.
12. Eleverna läser MaC (100 p) och avslutar med ett NP i MaC — nov-maj

**Åk 2 på Jenny Nyströmskolans NV-program, 16 elever**

13. Eleverna läser MaD (100 p) hela hösten och avslutar med ett NP i MaD — aug-dec.
14. Eleverna läser MaE (50 p) på våren och avslutar med ett NP i MaE — jan-mars
15. Matematik Breddning, MaF eller Matte Diskret (50 p) — mars-juni

**Åk 2 på Lars Kaggskolans NV-program, 26 elever, och TE-program, 24 elever**

16. Eleverna läser MaD (100 p) hela hösten och en del av våren. De avslutar med ett NP i maj . — aug-feb
17. Eleverna läser MaE (50 p) på våren och avslutar med ett NP i maj — feb-maj

[1] Texten kan hämtas på vår hemsida kagg.se
[2] Beställes hos birger@kagg.se
[3] NV-media på Lars Kaggskolan deltar ej

**I åk 2 har skolorna valt att göra lite olika**

Eleverna *Mer matte*-grupperna kallades förut för spetsmatteelever.

Spetseleverna på Jenny Nyströmskolan läser 200 p, dvs MaD, MaE och Ma-Diskret. Övriga läser 200 p, dvs MaC och MaD. Lektionerna för spetsgruppen och övriga grupper ligger parallellt.

Spetseleverna på NV på Lars Kaggskolan läser 150 p, MaD och MaE, och övriga elever läser 200 p, MaC och MaD. Lektionerna ligger parallellt. Därför får spetseleverna 1,5 håltimmar. De flesta spetseleverna har valt matematik i sitt *Projektarbete 100 p* och gör det arbetet redan i åk 2.

Spetseleverna på TE-programmet läser 150 p, MaD och MaE, medan övriga endast läser 100 p, MaC. Lektionerna ligger parallellt men spetseleverna har 1,5 h extra mattelektioner per vecka utlagda i schemat.

**I åk 3 kan eleverna läsa högskolematematik**

Då gymnasiematten avslutas i åk 2 har vi tagit fram två kurser med några avsnitt från grundkursen i matematik på högskolan. De är MaF som omfattar fördjupad integralkalkyl och vektoralgebra samt MaG där vi bland annat tar upp serier, kontinuitet och derivata.

*Birger och Sten-Åke*

# Utvärdering den 6 september 2004

Jag har haft ansvaret för detta projekt sedan augusti 2001. De elever som jag besökte på högstadiet 2001 - 02 har just börjat åk 3 på Lars Kagg- och Jenny Nyströmsskolorna. Det betyder alltså att jag fått följa en elevgrupp under 3 år.

Elevantalet som börjad spetsmatten ht 2002 med MaB var 85 st. Antalet som fullföljde till och med MaE blev 66 st. De som hoppat av till ordinarie mattegrupp var elever som inte kunde MaA till-räckligt bra och framför allt inte lade ner den tid som behövdes för att hänga med i undervisningen. Avhoppen har skett på elevens egen begäran under början av MaB-kursen.

Några avhopp beror också på att det har funnits ett rykte om att spetselever har fått gå fortare fram i kursen. Detta är dock inte sant. Vi har hållit samma studietakt som eleverna i de ordinarie matte-kurserna, frånsett att vi hoppat över MaA. Däremot har vi lagt tid på att göra vissa fördjupningar i kurserna.

Högstadielärarna har varit mycket tillmötesgående och känt sig stimulerade av att få göra något extra. Flera skolor har startat matematikgrupper under *Elevens Val* och tillströmningen har varit god. Även elever som tänkt välja andra program än TE och NV har deltagit.

Intresset har alltså ökat på högstadiet och när Jenny Nyströmsskolan ht 2002 kom in i projektet blev projektets mål tydligare.

Elever trivs med att slippa traggla matte som de redan kan! ***Mer matte*** har stimulerat!

# Två mål

Vi har haft två mål med projektet. Det ena är att intressera fler elever i nian på högstadiet att välja NV- och TE-programmen. Målet har alltså inte varit att värva elever till Lars Kaggskolan, Sten-Åkes och min skola. Det andra målet är helt enkelt att få eleverna att läsa *Mer matte* på gymnasiet, så att man är bättre förberedd för högskolestudier.

Vi har också gjort en undersökning hur betygen ändrats i matematik för elever som läst på NV och TE jämfört med slutbetyget i matematik i åk 9. Är betyget höjt, sänkt eller oförändrat jämfört med resultatet på de nationella proven i MaA och MaB. Alla elever på NV och TE ingår. Vi har bara jämfört resultat på de Nationella proven. En sammanställning av undersökningen finns på bilaga 1.

**Från undersökningen kan man dra följande slutsats om**

**MaA** Elever som valt spetsmatte har i genomsnitt varken höjt eller sänkt sina betyg i MaA. Samma resultat kan utläsas för elever som inte läst spetsmatte.

Påpekas kan att väldigt många av de som valt spetsmatte har haft höga betyg i Åk 9 så det har varit omöjligt att höja betyget!

**MaB** Däremot så har eleverna i spetsmatten sänkt sina betyg i mindre utsträckning i MaB och MaC än vad övriga elever gjort.

Detta talar för att spetsmatteeleverna tjänat betygsmässigt på att läsa spetsmatte. Man har dessutom läst fler kurser!

Kalmar den 6 september 2004

*Birger Andersson*

Bilaga 4

# Arbetsinsatser för projektledare

**Tidsåtgång 2001-02** 80 h
**Tidsåtgång 2002-03** 80 h

**Tidsåtgång 2003-04**

| | Uppgift | Tid (h) |
|---|---|---|
| 1 | Skriva inbjudan | 3 |
| 2 | Söka e-mejl-adresser mm | 2 |
| 3 | Besök på skolor restid 7h och besökstid 17h<br>Mörbylånga 3 mil, Borgholm 4 mil, Åkerboskolan 9 mil, Ljungbyholm 1 mil, Smedby 1 mil, Lindsdal 2 skolor 2 mil, Bergavik-, Funkabo-, Vasa- och Falkenbergsskolorna 2 mil. 27 * 2 mil = 44 mil= 7h | 24 |
| 4 | Tid för föreläsningar 4 st vardera 90 min | 15 |
| 5 | Framställa häften med uppgifter och lösningar till föreläsningarna | 10 |
| 6 | Tid för utskick | 1 |
| 7 | Tid för att producera ett bra slutprov | 4 |
| 8 | Samla in resultat och gå igenom dessa | 2 |
| 9 | Telefonsamtal, mejl-kontakter | 5 |
| 10 | Skriva projektredovisning | 3 |
| 11 | Besök på Jenny Nyströmskolan | 2 |
| 12 | Ge information till kollegor | 4 |
| 13 | Övrig tid | 5 |
| | Summa tid | 80 |

# Övriga arbetsinsatser

Stipendiet från Gudrun Malmers Stiftelse.
Sten-Åke och jag under våren och hösten 2004 arbetat med:

Framställning av kompletteringskompendium 40h
Arbete med hemsidan kagg.se 40h
Färdigställande av Projektbeskrivning 30h

Kalmar den 6 november 2004

*Birger Andersson*

# Läs *Mer matte på högstadiet*! Börja med Matte A i åk 9 på högstadiet!

**Här följer några förslag för dig som rektor eller lärare i matematik på högstadiet!**

Många elever tycker att matten ger för få utmaningar. Tempot bromsas upp av mindre intresserade elever. Det blir för mycket repetition och för många likadana uppgifter.

Om eleven erbjuds att läsa gymnasiekursen Matematik A parallellt med ordinarie matematikkurs, höjs intresset. Om man kan läsa ***Mer matte*** på ”elevens val” eller under andra former, tror vi att intresset kan stimuleras. Man måste ju inte läsa hela kursen.

I vårt mattepaket på kagg.se under fliken ***Mer matte*** finns ett upplägg som vi använder oss av i Kalmar. Högstadieskolorna i Kalmar, Borgholm, Mörbylånga och Torsås kommuner ger eleverna möjlighet att läsa ***Mer matte***. Vi ger också några föreläsningar på Lars Kaggskolan som eleverna kan besöka. Eleverna utmanas också av några ”Matte A-prov” och kan även genomföra Nationellt prov för MaA. Enligt berörda lärare på högstadiet så har detta blivit en sporre för många elever och läraren får dessutom mer tid till andra, mer krävande elever. Lärarna är också enligt vår mening klart positiva!

Du kan gå in på vår hemsida kagg.se och hämta hem det som passar dig. Det är fritt att ändra vid behov det du tar hem så att det passar dig och dina elever! Kompletteringskompendiet

***Mer matte på högstadiet***
***ger***
***Mer matte på gymnasiet***

är också gratis. Det kan du ta hem till din skola och kopiera i det antal du behöver.

Vi kan sända dig ett Nationellt prov i MaA, som eleverna kan träna på. Provet vi erbjuder är ett omarbetat sådant från 1996. Du kan säkert ta hem årets Nationella prov i MaA från ett gymnasium i närheten.

**Kolla upp att mottagande gymnasieskola kan ta emot elever som läst MaA på högstadiet!**

Annars startar ju elevens gymnasiestudier med ett evinnerligt repeterande i matematik.

Allt detta är förstås gratis! Men kan bli ett grattis!

*Sten-Åke och Birger*

e-postadress: matte@kagg.se
hemsida: kagg.se

Bilaga 6

# Läs *Mer matte på gymnasiet*! Börja med matte B på gymnasiets NV- och TE-program!

**Här är några erfarenheter som vi vill förmedla till dig som rektor på skolan eller lärare i matematik på gymnasiets NV- och TE-program!**

Många elever som börjar på NV och TE tycker det är tråkigt att läsa MaA! De får ju repetera det som man redan gjort på högstadiet!

På Lars Kaggskolan har vi nu under fem års tid med framgång låtit elever börja direkt med MaB vid höststarten i Åk 1. Eleverna blir klart mer stimulerade. De gör gärna läxor och fördjupar sig gärna i matematiken. De söker utmaningar!

De flesta av våra elever på Lars Kaggskolan och Jenny Nyströmskolan i Kalmar är helnöjda!

**Här är fem möjliga alternativ om man läser *Mer matte på gymnasiet.***

1. Skolan kan spara in kostnad för MaA-undervisning på 100 gymnasiepoäng .
   Alla startar med MaB på hösten i åk 1. Eleverna repeterar själva MaA efter behov och tenterar MaA i december.

2. Skolan sparar in delar av kostnad för MaA-undervisning på 100 gymnasiepoäng.
   Av upp till två fulla klasser bildar man en grupp som startar med MaA och den andra med MaB. Det kan dock bli tungt att undervisa i MaA om gruppen blir för stor!

3. Skolan har två eller tre fulla klasser. Så har vi gjort på Lars Kaggskolan och Jenny Nyström-skolan i Kalmar. På två klasser bildar man 3 grupper och på tre klasser bildar man 4 grupper. Man har då en, två eller tre mindre grupper som börjar med MaA. Övriga börjar med MaB. Kostnaden för skolan ökar men en del sparas in på grund av att många elever inte läser MaA.

4. Skolan har en sådan storlek att schemaläggaren kan parallellägga MaA för många program. Då kan man även få elever på dessa program att starta med MaB.

5. Det finns säkert ett ännu bättre alternativ för just din skola! Hör av dig och berätta!

Besök vår hemsida kagg.se Där finns mer information om vårt matteprojekt ***Mer matte***.

*Sten-Åke och Birger*

e-postadress: matte@kagg.se
hemsida: kagg.se

Bilaga 7

# Elevkommentarer

Jag brukar ställa följande fråga till eleverna i åk 2 när vi håller på att avsluta gymnasiematten: Vad skulle du säga till elever i åk 9 som just ska välja ”spetsmatte” eller ”vanlig matte”. Den första ”spetsmatte”-gruppen är NV99-elever Här är några av kommentarerna. NV99 innebär att NV-eleverna kom till oss i augusti 1999.

**Eva Dahlström, NV99**
Vi fick vara med att påverka tempot och att ta ett stort ansvar själv för att hänga med. Jag gillar stämningen på lektionerna, det kändes aldrig jobbigt att gå till matten. Jag avskydde matten på högstadiet, men faktiskt blev det här ganska intressant! Alla kan om man vill och det är väl värt att läsa lite snabbare!

**Stefan Karlsson, NV99**
Man läser många kurser i matte. I 3:an får vi läsa högskolematte och det är bra! Läs "spetsmatten" om du är intresserad av matte!

**Daniel Olsson, NV99**
Ska man läsa på högskolan efter gymnasiet är spetsmatten ett måste!

**Josefina Larsson, NV99**
Man slipper tjaträkna tal efter tal som man redan kan och lägger istället ner tid på de svåra uppgifterna!

**Oscar Rooth-Lorentzson, NV99**
Man känner att man får utveckla sig hela tiden. Tempot är väldigt mycket bättre än i vanlig matte och man får kämpa lite. Reporna är också väldigt bra. Matten som på högstadiet var för lätt och tråkig blir nu utmanande och rolig. –

**Från en anonym enkät till några NV00 elever i slutet av åk 2, då matten i stort sett var avklarad.**
- Bra att vi slapp MaA i åk 1, framhöll många elever. - Öka tempot i spetsmattegrupperna. Alla är bra på matte och tycker det är kul att ösa på! - Mer läxor, mer prov! - I grundskolan när alla läste lika snabbt kändes lektionerna onödiga. Nu får jag jobba i ett högre tempo och det är bra! - Det är coolt att vara bra på matte! - MaA är inte svårt för den som kan matte. Skippa den! Börja med MaB direkt.

**Martin Svensson, NV01**
Man lägger vikten vid det man inte kan inte tvärtom! Aldrig mer behöver man 100 likadana tal på raken. Aldrig mera döräkning! Det är alltid en utmaning att gå till matten!

**Kommentar**
Många elever ser en stor fördel att få börja med MaB direkt. Under våren 2004 hade vi därför en fråga på vår hemsida `kagg.se` som besökarna fick svara på. Utfallet blev följande:

**Frågan: Kan du tänka dig att läsa matte A på högstadiet?**

| Ja | Nej | Kanske | Vet inte | Summa |
|---|---|---|---|---|
| 190 st | 44 st | 13 st | 13 st | 260 st |
| 73 % | 17 % | 5 % | 5 % | 100 % |

Spetsmattekonceptet tycks utmana det stora flertalet av eleverna. Tre av fyra elever vill börja med MaB. Det märker vi också genom ett ökat söktryck till NV- och TE-programmen på Lars Kaggskolan. Även Jenny Nyström skolan har tagit till sig tanken med spetsmatte. Innevarande läsår har de en hel NV-klass med spetselever. Antalet spetselever har ökat hela tiden.

*Sten-Åke Bredmar*

# Elevenkät!

På teknikprogrammet fick eleverna som läser eller har läst ***mer matte*** en enkät som elevrådet ställt i ordning. Eleverna har sammanställt svaren. Kommentarer om lärare har tagits bort!

**Fråga 1.** Av vilka anledningar har du valt att gå ***matte mer***?

Åk 1: Jag vill lära mig mer, få större utmaningar, lärare rekommenderade.
Åk 2: Jag får extra mattekurser, mindre matte i trean, bättre lärare.
Åk 3: Man läser in matten snabbare, man läser mer matte.

**Fråga 2.** Vad har/hade du för förväntningar på själva kursen?

Åk 1: Man får mycket gjort, man hinner många kurser, tempot blir högre.
Åk 2: Man blir bättre, får matten klart fort, tempot blir högre, kan läsa matte diskret.
Åk 3: Att kursen blev lättare än vad man trott, man hann fler kurser, hann även matte diskret.

**Fråga 3.** När ni startade ***mer matte*** vilka kurser har/hade ni förväntningar på att få möjlighet att läsa? Och blev du informerad om kurser som du skulle kunna få möjlighet till att läsa? Och i så fall vilka?

Åk 1: Att få läsa matte B-G, att få läsa två kurser fler an den ”vanliga” gruppen. Men det var dålig info.
Åk 2: Att fåmöilighet till att hinna läsa universitetsmatte + diskret matte i trean. Men informationen var dålig!
Åk 3: Att få läsa matte A-E och för de som ville möjlighet att läsa matte diskret och breddning.

**Fråga 4.** Vi har nu kommit en bit in på terminen, vad tycker ni om kursen i allmänhet hittills? Och har det uppfyllt dina förväntningar?

Åk 1: Det är bra, men ibland för kort tid till repetition och då känns det som om det går för fort, och det blir stressigt.
Åk 2: Ibland går det lite för fort fram, och nu har man strukit MaE från tvåans kurs av schematekniska orsaker som också ger strul med matte diskret.
Åk 3: Våra förväntningar är inte uppfyllda ännu, då vi ännu inte fått läsa matte diskret och breddning, och möjligheten för det känns väldigt liten om det inte väljs som individuela val.

**Fråga 5.** Är det något i kursen du saknar, som du skulle önska var med?

Åk 1: Det önskas mer info. Eleverna går där för att lära sig mer, få större utmaningar och att lärare föreslog det!
Åk 2: Mer repetition behövs!
Åk 3: Ja diskret och matte breddning!

Sammanställning av 100 enkätsvar.
Gjord av
Johanna Karlsson TE03 B

Bilaga 8

# Kan projektet leva vidare och till vilken kostnad?

Vi tycker att projektet har varit framgångsrikt. När vi ser tillbaka kan vi bara konstatera att eleverna blivit medvetna om matematikens betydelse, man har stimulerats av att slippa repetera avsnitt i matematiken som man redan kan, man har fått en ändrad syn på att plugga – det är inte längre fult att vara en ”plugghäst”, många har deltagit i projektarbeten i matematik vilket ytterligare har förändrat inställningen till matematiken.

Hur som helst, vi hade inte tänkt oss dessa stora framgångar på vårt projekt! Slutsatsen blir

**Eleverna på på NV- och TE-programmen bör hoppa över MaA**

**För då får de - Bättre betyg!**
**- 100 poäng nästan gratis!**

# Projektarbetet

Samtliga elever på gymnasiet ska numera göra ett projektarbete. Lämpliga sådana är utomordentliga hjälpmedel att göra matematiken intressant och spännande. Det är inte bara att sitta och räkna i en bok utan väldigt mycket mer. Vi har på Lars Kaggskolan tagit fram ett flertal projektarbeten med anknytning till matematiken.

**Kagg Matematica** är en tävling i matematik för högstadiets elever i sydostregionen. Projektarbetet innefattar marknadsföring, presentation av tävlingen vid den årliga gymnasiemässan och grund-skolebesöket, besök ute på högstadierna då man berättar om matte i allmänhet och tävlingen i synnerhet, kontakt med tidningar för intervjuer, konstruktion av lämpliga tävlingsuppgifter, genomföra tävlingen, rätta provet och förrätta prisutdelningen tillsammans med landshövdingen. I april 2005 är det fjärde året som tävlingen går. Tolv elever arbetar med det projektet i år. Ett 80-tal elever från hela sydostkanten har deltagit.

**Matte på nätet** är ett examensarbete som fem studenter vid Högskolan i Kalmar gjorde på vårt uppdrag. Det är en internetbaserad lärobok i matematik. Tio elever arbetar med detta projektet. I uppgiften ingår att producera ett 50-tal uppgifter inom ett visst avsnitt, göra ett diagnostiskt prov samt att skriva teorin till avsnittet.

**kagg.se** är en hemsida där vi presenterar alla våra projekt, föreläsningar i matematik och mycket annat som har med matematik och fysik att göra. Under våren besöktes den av mer än 2000 elever. Två elever arbetar med att förbättra hemsidan och förenkla hanteringen av den.

**Tidningen $\pi$** kommer ut en gång om året och presenterar på ett proffsigt sätt vad vi gör på Lars Kaggskolan i matte och fysik. Det är ett samarbete mellan elever på NV- och mediaprogrammen. Den delas ut under hösten till elever i åk 9 inför valet av gymnasium.

**Sommarskola i matematik** är ett projekt som jag (Sten-Åke) haft tillsammans med lärare på Högskolan i Kalmar. Under sommarlovets sista dagar har vi inbjudit till fyra dagars föreläsningar i matematik i olika ämnen som inte ingår i någon kursplan. Ämnena har bland annat varit kryptering, stabilisering av servo-system, animeringar på datorn och mycket annat. Mellan 15 – 20 elever har deltagit varje gång.

**Mattetävling för mellanstadiet** är ett projekt som vi håller på att utveckla just nu. Grundtanken är att mellanstadieklasser deltar i månadsvisa mattetävlingar upplagd som en serie, ungefär som i fotboll. Klasserna i regionen tävlar med varandra under ett läsår. Duktiga klasser kan under året hamna högre upp i seriesystemet och tävla med klasser i högre årskurser. Vinnarklassen kanske får en dag på Ölands Djurpark.

Vi menar att detta är en nödvändig satsning därför att så många undersökningar visar att eleverna redan på mellanstadiet börjar tappa intresset för matematik och kommer inte igen förrän i åk 8.

Vi jobbar med att utveckla idén. Vi får se vart vi hamnar tilll slut.

**Labba på Kagg**. I fysik har vi också projektarbeten. Ett är att inbjuda elever på högstadiet att laborera i fysik. De får bland annat mäta ljusets hastighet med pulsad laser och hur mycket en elektron väger med hjälp av Helmholtz spolar. Med en mätdator undersöker de läge, hastighet och acceleration hos en svängande spiralfjäder. Marknadsföring, administration och handledning av labben ansvarar deltagarna i projektarbetet för.

Ett annat projekt i fysik är att gymnasister åker ut till mellanstadieklasser och gör ett antal enkla ”mystiska” försök. Vi vill med det skapa nyfikenhet och intresse för fysik och matematik. Projektet håller vi på att utveckla.

## Yngre kollegor tar vid

Projektet ***Mera matte*** har alla utsikter att leva vidare. Till vår stora glädje har yngre lärare på institutionen intresserat sig för projektet på ett sådant sätt att det borgar för en fortsättning. Så har en yngre lärare under detta läsår tagit ansvar för den administrativa sysslan, en annan ansvarar för föreläsningarna, en tredje har kontakten med lärarna på högstadiet som sitt ansvarsområde.

Skolledningen har glädjande nog också insett betydelsen av projektet och har från och med innevarande läsår lagt in projektet i våra lärartjänster.

Med den konstruktionen kommer vi inte att ha några återkommande kostnader för projektet utan det kan utvecklas i sin egen takt alltefter intresse, kraft och tid.

Sammantaget utvecklar projektet ***Mera matte*** med tiden en medvetenhet om och intresse för matematik i hela regionen. Vi har redan sett en god början av det.

*Sten-Åke och Birger*

*Mera matte*
på högstadiet

ger

*Mera matte*
på gymnasiet!

# *Mera matte* på högstadiet ger *Mera matte* på gymnasiet!

## Introduktion

Matematik på högstadiet i åk 9 innehåller följande fem områden:

1. Aritmetik, de fyra räknesätten
2. Ekvationer
3. Geometri
4. Statistik
5. Funktioner

Matematik A på gymnasiet är både bredare och smalare än högstadiets matematik!
I det här häftet gör vi en komplettering till MaA med följande:

Mera om potenser
Mera om förändringsfaktor, index
Mera om funktioner, exponentialfunktioner
Mera om statistik, histogram

**Endast index, exponentialfunktioner och histogram tillkommer i MaA.**
Resten i detta kompendium får bli en fördjupning.

Som underlag i vår bedömning har vi använt några av högstadiets läroböcker i matematik, **Matte till 1000, Matematikboken Z** och **MEGA-matematik**.

I detta häfte gör vi alltså de tillägg som behövs i högstadiets matematik för att täcka innehållet i MaA. När du sedan går ut nian kan du den teori som behövs för att hoppa över MaA på gymnasiet.

Häftet läser du parallellt med din lärobok i matematik för åk 9.
Det är även ett stöd för dig om du deltar i de föreläsningar vi har på Lars Kaggskolan.
Datum för dessa föreläsningar finns på hemsidan kagg.se !

Lycka till med dina mattestudier!

Kalmar den 10 november 2004 (2:a tryckningen 2005)

*Birger Andersson* *Sten-Åke Bredmar*
birger@kagg.se sa@kagg.se

# Vi börjar med potenser
(med heltalsexponent!)

Potenser är ett förenklat skrivsätt för multiplikation.

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$$

$4^5$ kallas för en *potens* med *basen* 4 och *exponenten* 5 och uttalas ”4 upphöjt till 5”.

Ex 1 $1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$

Potenser är också användbart då du skall skriva väldigt stora tal. Börja med ett tal mellan 1 och 10. Det kallas *grundpotens-form.*

Ex 2 $410\,000\,000 = 4{,}1 \cdot 100\,000\,000$
$= 4{,}1 \cdot 10^8$
(Flytta decimalkommat 8 steg till vänster)

Potenser är också bra att använda för pyttesmå tal.

Ex 3 $0{,}000\,063 = 6{,}3 \cdot 0{,}000\,01 =$
$$6{,}3 \cdot \frac{1}{100\;000} = 6{,}3 \cdot \frac{1}{10^5}$$

Nu skriver man om $\frac{1}{10^5}$ till $10^{-5}$
Det är mer praktiskt så. Då blir

$$0{,}000\,06 = 6 \cdot 10^{-5}$$
(Flytta decimalkommat 5 steg till höger)

Ibland kan det alltså vara bra att använda negativ exponent.

Ex 4 a) $6 \cdot 10^{-8} = \frac{6}{10^8}$

b) $3 \cdot 10^4 = \frac{3}{10^{-4}}$

Nu kan du också beräkna vad $2^{-3}$ är!

Ex 5 $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

## Potenser med negativ bas

Om basen i en potens är negativ så blir det klurigt! T.ex. $(-4)^2$

Men vi tar först upp vad ***motsatta tal*** är!

Om du har talet 3 så är det motsatta talet – 3. Du sätter alltså ett minustecken framför ett tal för att få det motsatta talet!

Du har nu talet – 3. Det motsatta talet blir då – (– 3). Men det motsatta talet till – 3 måste vara 3 vilket betyder att

$$-(-3) = 3$$

Ex 6 a) $3 \cdot (-3) = (-3) \cdot 3 =$
$= -3 \cdot 3 = -9$

b) $-3 \cdot (-3) = 9$

Vid multiplikation med 2 negativa tal blir produkten positiv!

**Regel**

Vid multiplikation med jämnt antal negativa tal blir produkten positiv.
Vid multiplikation med udda antal negativa tal blir produkten negativ.
Samma regel vid division!

Ex 7 a) $-4 \cdot (-5) \cdot (-2) \cdot (-3) = 120$
(4 minustecken = jämnt antal)

b) $-3 \cdot (-2) \cdot (-6) = -36$
(3 minustecken = udda antal)

Ex 8 a) $(-4)^2 = 16$
(2 minustecken = jämnt antal)

b) $(-2)^5 = -32$
(5 minustecken = udda antal)

Ex 9 a) $12 - 3^2 = 12 - 9 = 3$

b) $16 - (-3)^3 = 16 - (-27) =$
$16 + 27 = 43$

Lägg märke till att man först beräknar potensens värde. Sedan adderar eller subtraherar du.

Man kan också multiplicera potenser med samma bas!

Ex 10

a) $3^2 \cdot 3^4 = 3\cdot3 \cdot 3\cdot3\cdot3\cdot3 = 3^{2+4} = 3^6$

b) $4^6 \cdot 4^{-2} = 4^{6+(-2)} = 4^4$

Som du ser så *adderar* man exponenterna och det verkar ju logiskt!

Man kan också dividera potenser med samma bas!

Ex 11 a) $\frac{5^8}{5^6} = 5^{8-6} = 5^2$

b) $\frac{7^{12}}{7^{-4}} = 7^{12-(-4)} = 7^{12+4} = 7^{16}$

Som du ser så *minskar* man exponenten i täljaren med exponenten från nämnaren!

Man kan också multiplicera likadana potenser.

$3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = (3^2)^4$ då

$3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3 \cdot 3 o 3 \cdot 3 o 3 \cdot 3 o 3 \cdot 3 = 3^8$

Ex 12 $(3^2)^4 = 3^{2\cdot4} = 3^8$

Om du istället för vanliga tal använder bokstäver så går det lika bra! Samma regler gäller för både bokstäver och siffertal.

Ex 13 $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$

Ex 14 $a^2 \cdot a^3 = a \cdot a o a \cdot a \cdot a = a^5$

eller $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$

Ex 15 $\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a^2$

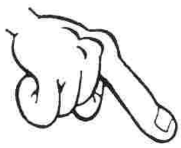
eller $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$

Ex 16 $\frac{x^3}{x^5} = x^{3-5} = x^{-2}$

Ex 17 $\frac{a^7}{a^7} = a^{7-7} = a^0$ men $\frac{a^7}{a^7} = 1$

Detta betyder att $a^0 = 1$, dvs alla tal upphöjt i noll är lika med 1.

Ex 18 $(a^3)^5 = a^{3\cdot5} = a^{15}$



## Kolla

vad du kan –
med ett korsord!

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | 2 | 3 |
| | | 4 | | |
| 5 | 6 | | | |
| | 7 | | | 8 |
| 9 | | | 10 | |

**Vågrätt**

1. $3^3$
2. $8^2$
4. $5^3$
5. $5\cdot10^3 + 5^3$
7. $2^3 + 2^4$
9. $9^2 - 4^2$
10. $6^2 + 5^2 + 4^2 +$ $+ 3^2 + 2^2 - 1^2$

**Lodrätt**

1. $15^2$
2. $5^4$
3. $7^2 - 2^2$
4. $10^2 + 5^2 - 1^2$
6. $1^3 + 2^3 + 3^3 +$ $4^3 + 5^2$
8. Basen är sju och exponenten två

Om du har räknat rätt blir summan av alla siffrorna i korsordet 80.


1. Beräkna följande potenser

   a) $4^3$ b) $3^4$ c) $2^5$ d) $5^3$ e) $10^4$

2. Skriv följande storheter utan 10-potenser

   a) Medelavståndet till månen är $3{,}8 \cdot 10^5$ km

   b) Vattenmängden i jordens hav är $1{,}37 \cdot 10^{18}$ $m^3$

   c) Tiden för ljuset att gå en mil är $3{,}33 \cdot 10^{-5}$ s

3. Skriv i grundpotensform

   a) Solens diameter är 1 400 000 km

   b) Temperaturen i solens centrum är 14 000 000 °C

   c) Avståndet till stjärnan Sirius är 85 000 000 000 000 km

**Tabell över några prefix**

| Tiopotens | Prefix | Tecken |
|---|---|---|
| $10^6$ | mega | M |
| $10^3$ | kilo | k |
| $10^2$ | hekto | h |
| $10^{-1}$ | deci | d |
| $10^{-2}$ | centi | c |
| $10^{-3}$ | milli | m |
| $10^{-6}$ | mikro | µ |
| $10^{-9}$ | nano | n |

4. Skriv nedanstående storheter utan prefix!

   a) 5 km b) 2,3 µs c) 12 MW d) 9 mm

5. 1 cm av tråden i en nylonstrumpa väger ungefär $2 \cdot 10^{-5}$ g. Uttryck denna vikt i

   a) mg b) µg

6. Den minsta delen av en koksaltkristall, en s.k. elementarcell, har formen av en kub med sidan 0,28 nm. Uttryck denna längd i mm.

7. Kärnreaktorn Barsebäck 1 kan lämna effekten 580 MW. Till hur många 60 W lampor räcker den effekten?

8. Ett ljusår är den sträcka ljuset hinner på ett år. Hur långt är ett ljusår då ljusets hastighet är 300 000 km/s?

9. En människa har ungefär $7{,}5 \cdot 10^4$ st hårstrån på huvudet. Den genomsnittliga längden för en pojkfrisyr är 7 cm.

   a) Hur stor är hårstrånas sammanlagda längd?

   b) Håret växer ungefär 0,3 mm per dag i genomsnitt. Hur långt växer håret sammanlagt på en månad?

10. Hushållen kastar varje år $3{,}2 \cdot 10^9$ kg sopor varje år. Hur många kg blir det per person om antalen invånare är 8,8 miljoner?

## Räkna lite varje dag!
## Minsta jobbet – största nyttan!

**Svar:**
1a) 64 1b) 81 1c) 32 1d) 125 1e) 10 000
2a) 380 000 km 2b) 1 370 000 000 000 000 000 $m^3$
2c) 0,000 0333 s 3a) $1{,}4 \cdot 10^6$ km 3b) $1{,}4 \cdot 10^7$ °C
3c) $8{,}5 \cdot 10^{13}$ km 4a) $5 \cdot 10^3$ m 4b) $2{,}3 \cdot 10^{-6}$ s
4c) $1{,}2 \cdot 10^7$ W 4d) $9 \cdot 10^{-3}$ m 5a) 0,02 mg 5b) 20 µg
6) $2{,}8 \cdot 10^{-7}$ mm 7) 9,7 miljoner
8) $9{,}5 \cdot 10^{12}$ km 9a) 5,2 km 9b) 700 m 10) 360 kg

# Funktioner, vad är det?

Du har säkert sett din tillväxtkurva som man tog fram på barnavårdscentralen. Du föddes 51 cm lång och vägde 3,4 kg. För varje månad kollades din längd och vikt. Längd och vikt ändrades mellan varje kontroll!

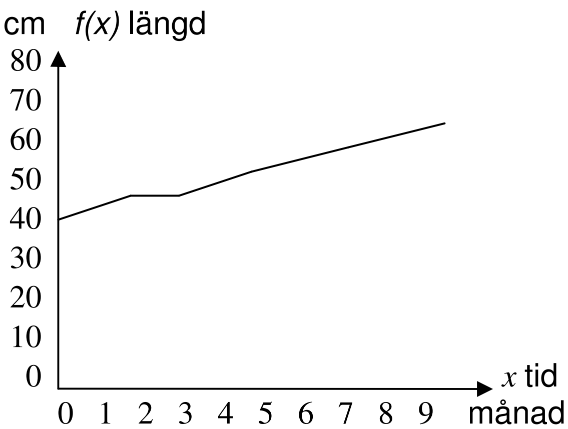
Man kan säga att din längd är *beroende av* hur gammal du är!
I matematiken säger man att din längd är *en funktion av* din ålder.

Om din längd kallas för $y$ och din ålder kallas för $x$, säger man att din längd $y$ är en funktion $f$ av din ålder $x$ och skriver

$$y = f(x)$$

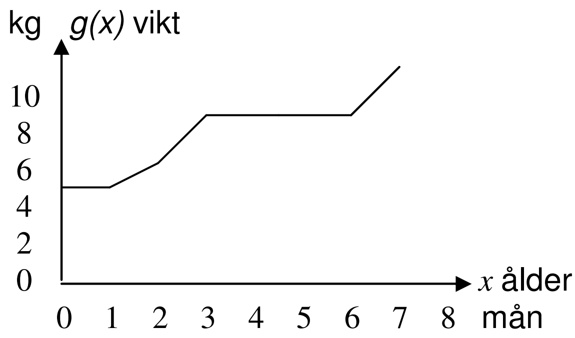
Funktionen $f$ visar vilket värde $y$ får om du sätter in ett värde på $x$ !

Om man ritar en graf så ser man lättare hur din längd varierar med åldern!




Om din vikt kallas för $z$, kan man skriva $z = g(x)$, eller utläst: vikten $z$ är en funktion $g$ av din ålder $x$.

Grafen visas i nästa spalt!




Du har i åk 9 sett många grafer där du avläst värden både på den horisontella axeln och den lodräta axeln.

Vi skall nu titta på enklare funktioner.

## Linjära funktioner

$y$ kan skrivas som en funktion av $x$, dvs

$$y = f(x)$$

OBS! $f(x)$ är ingen multiplikation utan en beteckning på ett räknesätt som visar hur ett $x$-värde ska behandlas för att få fram ett rätt $y$-värde.

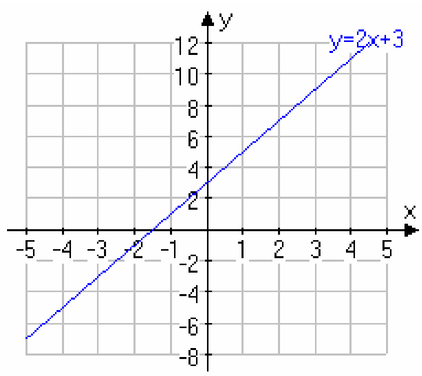
Ex 19 Rita funktionen $y = f(x) = 2x + 3$

Se tabell: Om $x = 4$ så blir
$y = 2$ gånger $4$ plus $3 = 11$

Värdetabell

| x | y |
|---|---|
| 4 | 11 |
| 2 | 7 |
| 0 | 3 |
| -2 | -1 |
| -4 | -5 |

Graf




Vad blir funktionens värde då $x = 3$ ?
Avläs svaret i grafen!
Starta där $x = 3$ på $x$-axeln! Gå rakt upp till linjen! Gå sedan till vänster! Värdet på $y$-axeln är $y = 9$.

Du kan också byta ut $x$ mot talet 3 i funktionen! Då får du

$$y = f(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9$$

Svar: Om $x = 3$ så är $y = 9$

Anm. $y = 9$ kallas ibland för "funktionens värde då $x = 3$"

Om du sättar in $x = 3$ i funktionen $f(x)$ och gör en beräkning för att få $y$ så får du ett säkrare svar än om du avläser i grafen!

Ex 20 Beräkna funktionsvärdena för funktionen $y = f(x) = 3x - 5$ då $x = 2$, $x = 0$ och $x = -3$.

Lösning: $f(2) = 3 \cdot 2 - 5 = 1$
$f(0) = 3 \cdot 0 - 5 = -5$
$f(-3) = 3 \cdot (-3) - 5 = -9 - 5 = -14$

Ex 21 Beräkna funktionsvärdena för funktionen $y = f(x) = -2x + 6$ då $x = 4$ och $x = -4$.

Lösning: $f(4) = -2 \cdot 4 + 6 = -8 + 6 = -2$
$f(-4) = -2 \cdot (-4) + 6 = 8 + 6 = 14$

Man behöver inte alltid räkna med siffror. Bokstäver går lika bra!

Ex 22 Beräkna funktionsvärdena för funktionen $y = f(x) = -2x + 6$ Då $x = b$ , $x = b - 3$ och $x = x^2$

Lösning: $f(b) = -2b + 6$
$f(b - 3) = -2 \cdot (b - 3) + 6 =$
$= -2b + 6 + 6 = -2b + 12$
$f(x^2) = 2x^2 + 6$

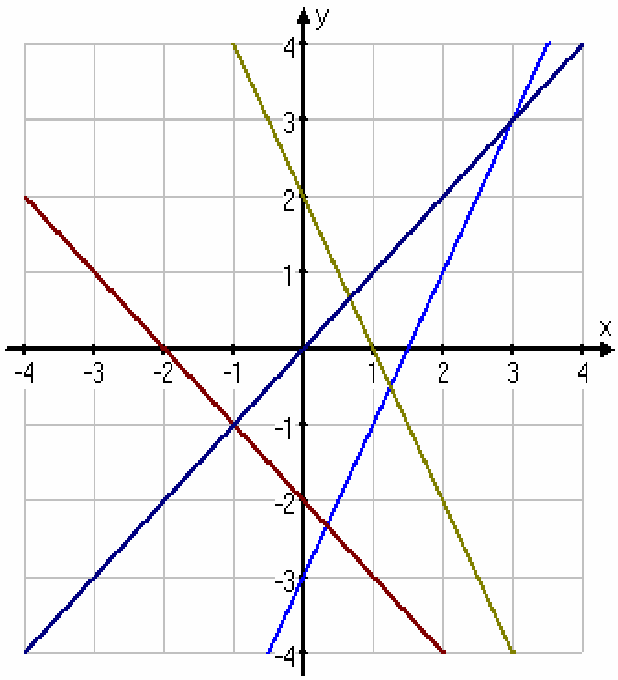
**matte på nätet**
är en mattebok! Kolla **kagg.se**


1. Kostnaden för en viss tråd är beroende av trådens diameter enligt tabellen.

| Diameter mm | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Kostnad öre | 5 | 8 | 20 | 45 | 80 | 120 |

a) Rita ett diagram där diameter är $x$ mm och kostnaden $y$ öre
b) Läs av i diagrammet vad en sådan tråd kostar om diametern är 0.3 mm.
c) Läs av i diagrammet vilken diameter som motsvarar en kostnad av 30 öre.

2. I diagrammet har vi ritat $y_1 = 2x - 3$, $y_2 = x$, $y_3 = -2x + 2$ och $y_4 = -x - 2$. Avgör vilken linje som är $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$




Svar: $y_1$ skär y-axeln vid värdet -3, $y_2$ vid 0 , $y_3$ vid 2 och $y_4$ vid -2

3. En bil kör 90 km/h på en motorväg.
   a) Skriv upp en funktion så att man kan räkna ut hur långt man kört. Kalla tiden för $x$ och körsträckan för $y$.
   b) Beräkna hur långt man har hunnit på 40 minuter.
   c) Hur lång tid tar det att köra 10 mil?

4. Beräkna värdet av $f(3)$ då $f(x)$ är

   a) $2x + 5$   b) $5x - 2$   c) $x^2 - 6x + 8$

5. Beräkna $f(2)$ då $f(x)$ är

   a) $x^3 - 4x$   b) $4x^2 + 3x - 19$

   c) $(x\text{-}1)(x\text{-}2) + (x\text{-}2)(x\text{-}3) + (x\text{-}1)(x\text{-}3)$

6. När man ska kopiera kan man betala på två olika sätt.
   1. Man betalar 25 öre/kopia oavsett hur mycket man kopierar.
   2. Man betalar en fast avgift på 3 kr per orginal plus 5 öre per kopia.

   a) Skriv upp en funktion som visar hur mycket det kostar att kopiera för de båda alternativen. Kalla kostnaden för $y$ och antalet kopior $x$.

   b) Rita funktionernas grafer i ett och samma koordinatsystem.

   c) Hur många kopior ska man göra för att alternativ 2 ska löna sig?

Lille Kalle har väldigt svårt för matte.
- Om du har sex köttbullar på tallriken och du sedan äter upp sex köttbullar, vad har du då kvar? frågar fröken i ett sista desperat försök.
- Potatisen! svarade Kalle strålande glad!

Svar:
1a) - b) 13 öre c) 0,50 mm 2) *Se under grafen!*
3a) $y$=90$x$ b) 60 km c) 1,1 h (h=timme) 4a) 11 b) 13
c) -1 5a) 0 b) 3 c) – 1 6a) $y_1$=25x $y_2$=300+5x b) -
c) 15 kopior per orginal (där linjerna skär varandra, x=15)

# Andragradsfunktionen

En sådan funktion innehåller en $x^2$-term!

Ex 23 Beräkna funktionsvärdena för funktionen $y = f(x) = x^2 + 2x - 4$ då $x = 3$ och $x = -3$.

Lösning: $f(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 - 4 =$
$= 9 + 6 - 4 = 11$

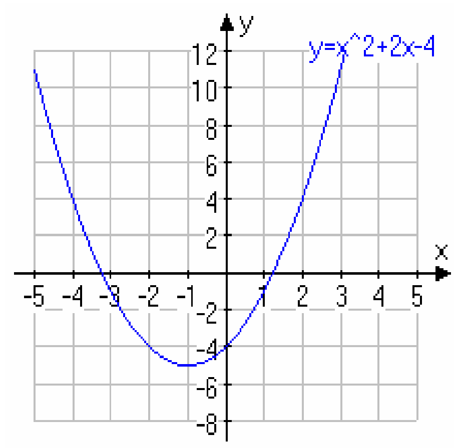
$f(-3) = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 4 =$
$= 9 - 6 - 4 = -1$

Kolla att beräkningen stämmer med grafen nedan!

Värdetabell

| x | y |
|---|---|
| 3 | 11 |
| 2 | 4 |
| 1 | -1 |
| 0 | -4 |
| -1 | -5 |
| -2 | -4 |
| -3 | -1 |
| -4 | 4 |
| -5 | 11 |

Graf




Vad blir funktionens värde då $x$ =2,5?

Avläs svaret i grafen! Starta där $x$ =2,5 på $x$-axeln – gå rakt upp till kurvan – gå sedan till vänster. Avläs det värde du har vid $y$-axeln!  $y = 7$ !

Du kan också sätta in 2,5 i stället för $x$ i funktionen $y = f(x) = x^2 + 2x - 4$.
Du får

$$y = f(2{,}5) = 2{,}5^2 + 2 \cdot 2{,}5 - 4 = 7{,}25$$

Det är inte alltid så lätt att avläsa i en graf! Det blir oftast ett bättre resultat om du räknar fram värdet!

# Exponentialfunktionen

Denna funktion saknas i åk 9 men finns med i MaA!

Nu skall vi behandla funktioner som innehåller potenser, där basen är positiv och exponenten är ett reellt tal $x$, t.ex. $y = 2^x$ eller $y = 1{,}05^x$

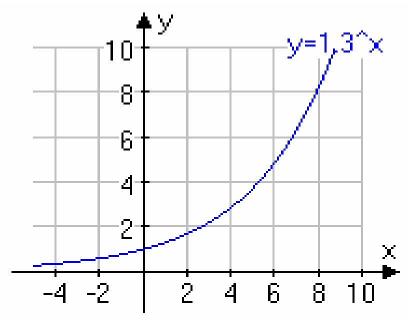
Reella tal är förresten tal som kan läggas in på en tallinje, t.ex. 5, -18, $\sqrt{7}$ eller $\pi$.

Ex 24 Rita funktionen $y = f(x) = 1{,}3^x$
Här måste du ha en miniräknare!

Värdetabell

| x | y |
|---|---|
| 8 | 8,2 |
| 6 | 4,8 |
| 4 | 2,9 |
| 2 | 1,7 |
| 0 | 1 |
| -2 | 0,6 |
| -4 | 0,4 |

Graf




Vilket värde har $y$ då $x = 3$? Avläs ur grafen. Du får $y = f(3) \approx 2$. Det är svårt att få ett noggrant värde!

Beräknar vi värdet med hjälp av miniräknaren blir det $f(3) = 1{,}3^3 \approx 2{,}197$

För att inse nyttan av att använda exponentialfunktioner så krävs vissa förklaringar!

# Förändringsfaktor

Ex 25 Om du sätter in alla dina besparingar, 2 000 kr på banken så får du ränta. Vi säger att du får 5%. Efter ett år har du fått $0{,}05 \cdot 2\,000 = 100$ kr i ränta. Då har du sammanlagt $2\,000 + 100 = 2\,100$ kr.

Du skulle också kunna tänka så här:

När du satte in pengarna på banken var det 100% av dina besparingar. Efter ett år fick du 5% av banken. Då har du 105%. 105% = 1,05 kallas *förändringsfaktor*!

Hur mycket är 105% av 2 000 kr ?

$$1{,}05 \cdot 2\,000 = 21\,00 \text{ kr}$$

Samma svar som tidigare!

Det gick fortare att räkna på detta sätt! Alltså:

Förändringsfaktor * gamla värdet = nya värdet

Ex 26 Har du pengar på Banken under flera år så tänker du så här:

Du har 2 000 kr! Räntesatsen är 5%.

Efter *ett år* har du $2000 \cdot 1{,}05 = 2100$ kr

Efter *två år* har du $(2000 \cdot 1{,}05) \cdot 1{,}05$ eller $2000 \cdot 1{,}05^2 = 2205$ kr

Efter *tre år* har du $(2000 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05) \cdot 1{,}05$ eller $2000 \cdot 1{,}05^3 = 2315$ kr

Efter *10 år* har du $2000 \cdot 1{,}05^{10} = 3\,258$ kr

Efter $x$ *år* har du $2000 \cdot 1{,}05^x$ kr.

Nu har du skapat en exponentialfunktion! Du har $y$ kr efter $x$ år!

$y$ är en funktion av $x$

$$y = f(x) = 2000 \cdot 1{,}05^x$$

Här är några andra exempel på exponentialfunktioner.

Ex 27 Lönen för en som jobbar på Posten stiger i genomsnitt med 3% per år. Förändringsfaktorn blir 1,03. År 1980 var inkomsten 12 000 kr. År 1990, alltså efter 10 år, hade inkomsten stigit till

$$12\,000 \cdot 1{,}03^{10} = 16\,127 \text{ kr}$$

Ex 28 Din äldre bror köper en bil för 12 000 kr. Han räknar ut att bilen tappar 25 % i värde för varje år! Förändringsfaktorn blir då

$$100\% - 25\% = 75\% = 0{,}75$$

Funktionen ser ut så här:

$$y = f(x) = 12\ 000 \cdot 0{,}75^x$$

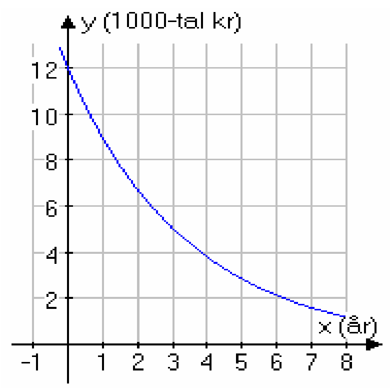
Bilens värde om 5 år blir då
$12\ 000 \cdot 0{,}75^5 = 2\ 848$ kr (c:a 3 000 kr)

Rita grafen till $y = 12\ 000 \cdot 0{,}75^x$

Värdetabell

| x | y |
|---|---|
| 0 | 12 |
| 1 | 9 |
| 2 | 6,75 |
| 3 | 5,06 |
| 4 | 3,80 |
| 5 | 2,85 |
| 6 | 2,14 |
| 7 | 1,60 |

Graf




Ex 29 Värdet på ett gammalt mynt förändrades från år 1980 enligt exponentialfunktionen

$$y = 250 \cdot 1{,}12^x$$

Vad betyder a) 250 b) 1,12 c) $x$ d) $y$

Svar: a) Värdet på myntet år 1980 var 250 kr
b) förändringsfaktorn är 1,12 dvs värdeökningen är 12% per år.
c) $x$ anger antal år efter 1980
d) efter $x$ år är värdet på myntet $y$ kr.

Ex 30 Jag har idag 5 000 kr som jag sätter in på banken. Räntesatsen är 3,4 %. Vilket värde, $y$, har pengarna efter $x$ år?

Ställ upp en funktion med startvärdet 5 000 kr. Förändringsfaktorn är 1,034 ( 100% + 3,4% = 103,4% = 1,034) och $x$ är antal år. Det ger

$$y = f(x) = 5000 \cdot 1{,}034^x$$

**I MaA skall du kunna**
- använda förändringsfaktor
- läsa av $x$ och $y$-värden på en exponentialfunktion.
- beräkna y-värdet hos en exponentialfunktion.
- förklara de olika delarna i en exponentialfunktion.
- ställa upp en exponentialfunktion.


Dessa uppgifter betraktas som svåra!

1. Rita funktionen $y = 2^x$ i ett diagram då talet $x$ varierar mellan 0 och 4. Avläs ungefärliga värden på följande

a) $2^{0,5}$ b) $2^{1,8}$ c) $2^{2,2}$ d) $2^{1/3}$

2. Se diagrammet som du gjorde i föregående uppgift och bestäm $x$ i följande ekvationer (exponentialekvationer).

a) $2^x = 7$ b) $2^x = 12$ c) $2^x = 1$

3. Lös följande ekvationer!
Tänk på att du kan göra om 8 till $2^3$.

a) $2^{x+1} = 8$ b) $2^{2+x} = 32$ c) $2^{4-x} = 4$

Svar:
1a) 1,4 b) 3,5 c) 4,6 d) 1,3 2a) x=2,8 b) x=3,6
c) x=0 3a) x=2 b) x=3 c) x=2

# Vad är index ?

Detta avsnitt saknas i åk 9 men finns med i MaA!

Nu skall vi använda förändringsfaktorn på ett annat sätt!

När vi vill studera prisutvecklingen på en vara under en längre tidsperiod kan man använda index. Det kan t.ex.gälla pris på fastigheter, matvaror, aktier eller bilar.
Mest kända index är konsument-prisindex KPI. Se tabell till höger!

| År | **KPI** |
|---|---|
| 2002 | 272,8 |
| 2001 | 267,1 |
| 2000 | 260,7 |
| 1999 | 258,1 |
| 1998 | 257,0 |
| 1997 | 257,3 |
| 1996 | 256,0 |
| 1995 | 254,8 |
| 1994 | 248,5 |
| 1993 | 243,2 |
| 1992 | 232,4 |
| 1991 | 227,2 |
| 1990 | 207,8 |
| 1989 | 188,1 |
| 1988 | 176,7 |
| 1987 | 167,0 |
| 1986 | 160,3 |
| 1985 | 153,8 |
| 1984 | 143,2 |
| 1983 | 132,6 |
| 1982 | 121,7 |
| 1981 | 112,1 |
| 1980 | 100 |

Konsumentprisindex har ett *basår*, t.ex. 1980.

Under basåret kostar en vara 100%. 100 är då index för detta år. Sedan jämför man varans pris t.ex.1992 med basåret.

År 1992 kostade varan 232,4% jämfört med 1980.

Ex 31. En vara kostar 167 kr 1987. Vad kostar samma vara 1998, om priset följer KPI?

Lösning: Index för 1987 är 167. Index för 1998 är 257. Varan kostar alltså 257 kr 1998.

Ex 32 Ett kilogram fläskkotlett kostade 20 kr år 1980. Vad kostar ett kilogram fläskkotletter 1987 om prisutvecklingen för fläskkotletter följer KPI?

Lösning:
År 1987 är indextalet 167. Det betyder att 1987 kostar fläskkotletten 167% av sitt värde 1980. 1980 var ju basår!
$1{,}67 \cdot 20$ kr = 33,40 kr per kilogram.

**Regeln är**

$$nya\ priset = \frac{nya\, indextalet * gamla\ priset}{gamla\, indextalet}$$

Ex 33 1990 kostade en biljett till en allsvensk fotbollsmatch 100 kr. Vad skulle priset bli 2001 om prisutvecklingen för allsvenska fotbollsbiljetter följde KPI?

Lösning:
Index år 2001 är 267,1
Index år 1990 är 207,8
Biljettpris 1990 är 100 kr
Biljettpris 2001 efterfrågas!

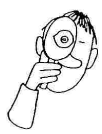
Biljettpris 2001:

$$\frac{267{,}1 * 100kr}{207{,}8} = 128{,}50\,kr$$

Svar: Biljettpriset 2001 blev 128,50 kr (troligtvis 130 kr)

Ex 34 Med hur många procent ändrades KPI från 1995 till 2001?

Lösning:
Index år 2001 är 267,1
Index år 1995 är 254,8
Förändringfaktor: $\frac{267{,}1}{254{,}8} = 104{,}8$
Svar: KPI-indexet ändrades 4,8%



**Detta ska du kunna!**

I **MaA** skall du

- känna till Konsumentindex KPI.
- kunna beräkna prisändringar med KPI.
- kunna beräkna ändringar i KPI.


1. Ett kilo lax kostade 29,90 år 1989. Vad kostade laxen per kilo 1995 om priset för lax följde KPI?

2. Lönen för en tjänsteman var 3 500 kr per månad år 1983. Vilken månadslön hade tjänstemannen 1998 om löneutvecklingen följde KPI?

3. År 2001 kostade en liter 95 oktanig bensin 8,57 kr. Vad kostade bensinen 1992 om priset har följt KPI?

4. Jag betalade 985 kr år 2000 för en helårsprenumeration på en tidning. Vad borde prenumerationen ha kostat 1984 om priset har följt KPI?

5. En villa köptes 1981 för 178 000 kr. Vad borde värdet på villan vara 20 år senare om priset följer KPI?

6. Hur många procent högre lön borde en anställd få ut efter skatt 2002 för att få samma lön som 2001? Använd KPI. Svara med en decimal.

7. Marias cykel förstördes vid en trafikolycka 1992. Cykeln var då tre år gammal. Försäkringsbolaget gav Maria en ny cykel av samma modell. Den kostade 1450 kr. Hur mycket hade Maria betalat för sin cykel när den var ny om priset följt KPI?

**Svar:**
1) 40,50 kr/kg 2) 6784 kr/mån 3) 7,46 kr/l 4) 541 kr
5) 424 000 kr 6) 2,1 % 7) 1174 kr

# Ekvationer

Ekvationslösning är ett viktigt avsnitt i MaA. På högstadiet har du redan gjort alla typer av ekvationer som ingår i MaA. Det som du bör träna på är redovisningen av dina ekvationslösningar.

Du måste kunna skilja på *termer* och *faktorer.*

När du förenklar i en ekvation så gör du det i den här ordningen:

- Beräknar potenser
- Tar bort parenteser
- Flyttar termer
- Flyttar faktorer

| | | |
|---|---|---|
| Ex 35 | $6x + 2\cdot(5^2 - 2x)$ | $= 6$ |
| Potenser: | $6x + 2\cdot(25 - 2x)$ | $= 6$ |
| Parenteser: | $6x + 50 - 4x$ | $= 6$ |
| Termer: | $6x - 4x$ | $= 6 - 50$ |
| | $2x$ | $= -44$ |
| Faktorer: | $x$ | $= -44/2$ |
| | $x$ | $= -22$ |

Ex 36 (svår) $\frac{3x}{4} - 2(2x-1) = 2 - \frac{2x+1}{2}$

Multiplicera alla termer med 4!

$$3x - 8(2x - 1) = 8 - 2(2x + 1)$$

Multiplicera in i parentesen!

$$3x - 16x + 8 = 8 - 4x - 2$$

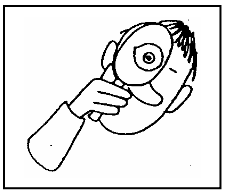
Förenkla! $-13x + 8 = 6 - 4x$

Flytta termer! $8 - 6 = -4x + 13x$

$$2 = 9x$$

$$9x = 2$$

Flytta faktor! $x = 2/9$



**Tankenöt för den klurige**

Vad är klockan nu, om det för tre timmar sedan var dubbelt så långt tid till klockan 10, som det är om en timme?

## Potensekvationer

är ekvationer där potensen har $x$ som bas!

Först mer om potenser!

Vi skall använda potenser där exponenten är bråktal eller decimaltal!

$3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 3^1 = 3$ (potensregel)

men $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$

alltså är $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ (egentligen $\sqrt[2]{3}$ )

På samma sätt $4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} = 4^1$

Alltså är $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$

**Regeln är**

$$\sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}} \qquad x > 0$$

Ex 37 Lös ekvationen

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 16^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

Observera att $4^2 = 16$ och $(-4)^2 = 16$

Ex 38 Lös ekvationen

$$x^5 = 32$$

$$x = 32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$$

Observera att $(-2)^5 = -32$

Ex 39 Lös ekvationen

$$x^4 = 81$$

Ofta kan man lösa ekvationen enkelt genom att man skriver om högra ledet till en potens med exponenten 4 som i det här fallet, dvs

$x^4 = 3^4 \quad \Rightarrow \quad x = 3$ (även $x = -3$ gäller!)

## Exponentialekvationer

är ekvationer där potensen har $x$ som exponent!

Ex 40 $\quad 5^{x+4} = 5^{2x}$

Detta är en ekvation! Värdet på vänster sida är lika mycket som värdet på höger sida. Basen är samma på båda sidor och då måste exponenterna vara lika.

$$x + 4 = 2x$$
$$x = 4$$

Ex 41 $\quad 32 \cdot 2^x = 4^{2x}$

är också en ekvation som ser omöjlig ut att lösa, men vi kan skriva om den

$$2^5 \cdot 2^x = (2^2)^{2x} \quad \text{eller} \quad 2^{5+x} = 2^{2 \cdot 2x}$$

Nu är baserna lika och då koncentrerar vi oss på exponenterna, som också måste vara lika.

$$5 + x = 4x$$
$$3x = 5$$
$$x = 5/3$$

# Knep och knåp

Kan du lista ut vilka tal de olika symbolerna står för och hur stor summan av talen på sista raden blir?

♥ + ♥ = 14
♥ + ◊ = 17
◊ + ∇ = 25
♥ + ◊ + ∇ + ∅ = 50
∇ + ♥ + ∅ + ⊥ + ⊥ = 90
◊ + ∇ + ♥ + ∅ + ⊥ = ???


1. Lös ekvationerna

   a) $x^4 = 16$ b) $x^4 = 81$ c) $x^3 = 125$

2. Lös ekvationerna

   a) $x^4 = 10\,000$ b) $x^7/x^4 = 64$

3. Lös ekvationerna

   a) $(x^2)^3 = 64$ b) $x^8/x^3 = 243$

4. Lös ekvationerna

   a) $2^x = 16$ b) $3^x = 27$ c) $4^x = 1024$

5. Lös ekvationerna

   a) $3^{x+2} = 9^4$ b) $4^x + 2^{2x} = 32$

6. Lös ekvationerna

   a) $2^3 \cdot 2^x = 2^{3x}$ b) $3^7 \cdot 3^{-5} \cdot 3^x = 243$

## Raketnöt

Två raketer rusar rakt emot varandra, den ena med en hastighet av 900 km i timmen och den andra med 2 100 km i timmen. De startar från två punkter som ligger 1317 km ifrån varann. Utan att använda papper och penna, räkna ut hur långt de är ifrån varann en minut innan de kolliderar.

Källa: Martin Gardner, Rolig Matematik 2

**Svar:**
1a) x=2 b) x=3 c) x=5 2a) x=10 b) x=4 3a) x=2 3b) x=3 4a) x=4 b) x=3 c) x=5 5a) x=6 b) x=2 6a) x=1,5 b) x=3

# Histogram

Saknas i åk 9 och skall behandlas i MaA!

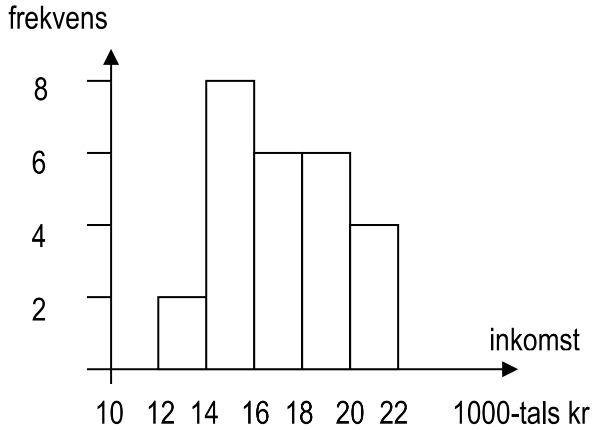
I högstadiets mattematik är histogram sparsamt behandlat. Trots det används histogram flitigt inte minst i skolan t.ex. när det gäller prov. Var och en har olika poäng på provet och dessa poäng grupperas i betyg. Det är innebörden av histogram, man grupperar observationer och visar grupperna.

Ett annat exempel är inkomstfördelningen hos de anställda i ett företag. Man samlar de som har t.ex. inkomster mellan 12 000 kr och 14 000 kr i en ***klass*** och gör ett diagram där klasserna sätts på $x$-axeln och frekvensen i varje klass sätts på $y$-axeln!

Ex 42 Inkomster per månad för de som arbetar i företaget ***Pi*** varierar enligt följande tabell:

| Inkomst (1000-tal kr) | frekvens (antal) |
|---|---|
| 12 -14 | 2 |
| 14-16 | 8 |
| 16-18 | 6 |
| 18-20 | 6 |
| 20-22 | 4 |
| | |

***Klassbredden*** är 2 000 kr!
Man kan visa inkomstfördelningen med ett ***histogram.***



Problem!
Vilken klass tillhör en person som tjänar 16 000 kr?
Vi kan säga att de som har 16 000 kr placeras i klassen 16 000 – 18 000 så gör vi det enkelt för oss.
Matte skall ju vara enkelt!

Fler problem!
Vilken blir medelinkomsten för de som arbetar i företaget **Pi**?
Man tar då fram en ***klassmitt*** och säger att alla i klassen tjänar så mycket som klassmitten visar.

Vi gör en ny tabell!

| Klassmitt | Frekvens | Klassmitt · frekvens |
|---|---|---|
| 13 | 2 | 13 · 2 = 26 |
| 15 | 8 | 120 |
| 17 | 6 | 102 |
| 19 | 6 | 114 |
| 21 | 4 | 84 |
| Summa: | 26 | 446 |

De anställdas totala lön blir 446 000 k

Medellönen blir då

446 000/26 = 17 154 kr

I **MaA** skall du kunna
-rita histogram.
-tolka histogram.
-beräkna medelvärdet.

## Några uppgifter från nationella prov i MaA

1. Värdet, $y$ kr, av en lastbil antas vara en funktion av bilens ålder, $x$ år, enligt formeln

$$y = 750\,000 \cdot 0{,}80^x$$

   a) Vad kostade lastbilen som ny?

   b) Beskriv hur lastbilens värde förändras med dess ålder.

2. Betrakta följande mönster av tal.

| rad | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 3 5 |
| 3 | 7 9 11 |
| 4 | 13 15 17 19 |
| 5 | 21 23 25 27 29 |
| 6 | - - - - - - |
| osv | - - - - - - - - |

Hur stor är summan av alla talen i rad
a) nr 6? b) nr 100? (ht-99)

3. Första avsnittet av den nya TV-såpan *Skum* sågs av 80 000 personer. Den har blivit en succé och antalet tittare ökar med 6 % för varje vecka.

   a) Hur många ser programmet efter två veckor?

   b) Med hur många procent har antalet tittare ökat efter fem veckor?

   c) Efter hur många veckor har antalet tittare fördubblats? Svara i hela veckor. (vt99:9)

4. Johanna häller kaffe med temperaturen 92° C i en termos. Hon ställer sedan termosen utomhus där temperaturen är 15°C. För att beskriva hur temperaturen $y$° C hos kaffet förändras med tiden $x$ timmar undersöker hon två olika modeller.

Formel för modell A: $y = 92 - 7x$

Formel för modell B: $y = 92 - 0{,}93x$

   a) Beräkna kaffets temperatur efter tre timmar med formel A och formel B.

   b) Beskriv med vardagligt språk vad formel A resp. formel B säger om hur temperaturen sjunker.

   c) Undersök hur många timmar modell A respektive modell B kan gälla. (vt02:10)

5. För att omvandla grader Celsius ($^{o}$C) till grader Farenheit ($^{o}$F) kan man följa denna instruktion, översatt från engelsk text.

Dela temperaturen i grader Celsius med 5, multiplicera resultatet med 9 och lägg till 32 så får du temperaturen i grader Farenheit.

a) Hur många grader Farenheit motsvarar 25$^{o}$ C?

b) Gör om innehållet i textrutan till en formel.

**Svar NP i MaA**
1a) 750 000 kr b) t.ex. värdet minskar med 20 % varje år 2a) 216 b) 1 000 000 3a) 90 000 b) 34 % c) 12 veckor 4a) 71 $^{o}$C resp. 74 $^{o}$C b) Gradtalet minskar med 7 grader per timme resp. 7 % per timme c) 11 timmar resp. 25 timmar 5a) 77 $^{o}$F b) F = 9C/5 + 32

Kagg.se
matte & fysik

är Lars Kaggskolans hemsida för matte och fysik. Där kan du bland annat läsa om fler matteaktiviteter

- Läsa ”matte på nätet”
- Föreläsningar i matte för högstadiet
- Mera Matte på Kagg och Jenny
- Mattetävlingen Kagg Matematica