BORLÄNGE KOMMUN

Matematik på lågstadiet genom algebra och problemlösning

Elevintervjuer om jämförelser av kvantiteter

Författare Helena Eriksson

Handledare Elisabeth Doverborg och Eva Norén

Förord

Jag vill i detta förord framför några stora och verkligen välmenade tack till personer som gjort arbetet med den här rapporten möjligt. Rapporten handlar om elevintervjuer som är genomförda som *en* del i ett undervisningsutvecklande projekt inom matematik på lågstadiet. Projektet och intervjuerna beskrivs i rapporten.

Först och främst ett stort tack till Gudrun Malmers Stiftelse. Utan stipendiet från Stiftelsen hade de elevintervjuer som den här rapporten handlar om med stor sannolikhet förblivit obearbetade. Vi hade med stor sannolikhet inte haft möjlighet att sammanställa något resultat eller publicera någon text om dessa intervjuer.

Ett lika stort tack vill jag även framföra till prof Inger Eriksson och doc Torbjörn Tambour på Stockholms universitet. Både Inger och Torbjörn har under hela vårt 3-åriga projektarbete funnits som sakkunniga i både verksamhetsteoretiska och matematikdidaktiska frågor. Utan era ingående och förklarande mail på våra undervisningsfrågor hade projektet inte varit möjligt så som det nu genomförts. Tack även till Stiftelsens handledare, Elisabeth Doverborg och Eva Norén, för kloka och klarsynta råd samt tålmodigt läsande under skrivandet av rapporten.

Alla elever och alla fröknar som arbetat med projektet ”Matematik på lågstadiet genom algebra och problemlösning”. Tack för Er medverkan och Ert brinnande engagemang. Tur att vi fortfarande arbetar tillsammans, så detta tack inte behöver vara ett tack och farväl. Nu är det mer att se som att vi fortsätter arbeta med samma glöd som hittills.

Innehållsförteckning

Bakgrund

Den här rapporten redovisar delar ur ett matematikdidaktiskt undervisningsprogram utvecklat av Daniil El'konin och Vassilii Davydov verksamma i Moskva i slutet av 1960-talet. Programmet har prövats på en interkulturell grundskola i Sverige tillsammans med lärare och elever i årskurs 1, 2 och 3. Rapporten redovisar analyser av elevintervjuer med elever i årskurs 1 som arbetat med uppgifter ur detta program.

Ett pilotprojekt

Skolutvecklingsprojektet som eleverna deltar i heter "Matematik på lågstadiet genom algebra och problemlösning". Projektet är treårigt och har vid rapportens skrivande pågått under 2 läsår. De elever som intervjuats går i årskurs 1 under det första och det andra projektåret.

Projektet genomförs på en kommunal grundskola med elever i f-klass till och med årskurs 6. Under de läsår som projektet genomförts har skolan haft mellan 70 och 75 % elever med annat modersmål än svenska. Skolan har cirka 25 olika modersmål, varav de största modersmålen är svenska, somaliska, kurdiska och arabiska.

I skolutvecklingsprojektet arbetar jag som är kommunal lektor i matematikämnets didaktik som projektledare. I projektet ingår även en handledare ur skolans specialpedagogiska team samt klasslärare som undervisar i de ingående klasserna. Varje vecka träffas projektgruppen för att designa och analysera lektioner och uppgifter vi ska genomföra och som vi har genomfört. Lektionerna dokumenteras med filmkamera och projektgruppens planeringar dokumenteras med ljudupptagning. Under det första projektåret arbetade två klasser med årskurs 1 med uppgifterna en matematiklektion i veckan. Under det andra projektåret arbetade tre klasser årskurs 1 och två klasser årskurs 2 i projektet, och under det tredje året arbetar tre klasser årskurs 1, tre klasser årskurs 2 och två klasser årskurs 3. Olika många klasser har alltså deltagit i projektet under de tre projektåren enligt nedanstående tabell.

Tabell: 1 Deltagande klasser i projektet

Projektår och läsår	Deltagande årskurser	Lektioner/ vecka (lektionstid)	Antal klasser
1 14/15	1 a, b	1 (90 min)	2
2 15/16	1 a, b, c	1 (60 min)	3
	2 a, b	1 (90 min)	2
3 16/17	1 a, b, c	3 (30 min)	3
	2 a, b, c	2 (30 min)	3
	3 a, b	1 (40 min)	2

I projektet prövas uppgifter ur El'konin och Davydovs matematikdidaktiska program så som de presenteras i materialet Matematikka från 2012 (Davydov, Gorbov, Mikulina, & Saveleva, 2012). Detta matematikdidaktiska program är utvecklat av El´konin och Davydov i ett mer än trettioårigt forskningssamarbete mellan Skola Nr 91 och Psychological Institute, Russian Academy of Education, båda belägna i Moskva. Uppgifterna har i viss mån prövats i Sverige i tidigare studier, och har presenterats i ett antal vetenskapliga texter[1]. Forskningsarbetet i Moskva påbörjades under 1960-

[1] Eriksson H (2015) *Rationell tal som tal. Algebraiska symboler och generella modeller som medierande redskap*; Eriksson H (2016) Taluppfatning i heterogena elevgrupper publicerad i *Nämnaren 2016:1*; Eriksson, I. och Jansson, A. (2017). Designing

talet och fortgår alltjämt. Professor Inger Eriksson vid Stockholms universitet har kontakt med forskarteamet i Moskva. Hon har tillsammans med docent Torbjörn Tambour Stockholms universitet stöttat och stöder fortlöpande projektet ”Matematik på lågstadiet genom algebra och problemlösning” vetenskapligt och kvalitetsmässigt.

El´konin och Davydovs matematikdidaktiska program

Davydovs program bygger på Vygotskys (1986) idéer om att skolan måste ta ett speciellt ansvar för att elever ska utveckla teoretiskt tänkande. Förenklat kan det uttryckas som att undervisning i skolan måste ge eleverna möjligheter att engagera sig i teoretiskt arbete genom exempelvis teoretiska resonemang. Vygotsky menar att teoretiskt arbete gör det möjligt för eleverna att rekonstruera kunskaper som historiskt har utvecklats i vissa specifika sammanhang (exempelvis jämförelser av kvantiteter inom matematiken) med specifika redskap (exempelvis matematikspecifika redskap såsom tallinjen, tabeller och symboler) för att kunna omtolka och använda kunskaperna även i andra sammanhang (Davydov, 2008/1986; 1990; Kinard & Kozulin, 2012). För att det ska vara möjligt att engagera sig i teoretiskt arbete menar Davydov att elever bör erbjudas att ta del i sådana verksamheter han kallar lärandeverksamhet. En lärandeverksamhet kan kortfattat beskrivas som att eleverna är delaktiga i problemformuleringar och att de identifierar kunskaper genom att använda ämnesspecifika redskap samt att de får möjlighet att reflektera över egna och andras förslag till modeller och lösningar på de problem de varit med och formulerat. En lärandeverksamhet kan endast etableras i de fall eleverna kan identifiera problem som de finner värda att försöka lösa. Elevernas arbete sker genom att de deltar i att utveckla en modell som kan fungera för att lösa problemet. Det sista steget i en lärandeverksamhet handlar om att reflektera över och värdera modellen de utvecklat (se även Zuckerman, 2004). För att utveckla lärandeverksamheter inom matematikämnet bör matematikundervisningen dessutom organiseras som en så kallad algebraisk undervisning (jfr Van Oers, 2001). För att beskriva undervisning i matematik i den refererade texten delar Van Oers in de dominerande undervisningstraditionerna i matematik i en aritmetisk och en algebraisk tradition. Den aritmetiska traditionen kännetecknas av att exempelvis taluppfattning utvecklas genom arbete med numeriska exempel i matematiska operationer. Det finns inom den aritmetiska tradition en tanke om att eleverna under de första skolåren ska utveckla matematiska begrepp utifrån vardagliga erfarenheter, via konkreta och laborativa uppgifter, som sedan ligger till grund för mera avancerat matematiskt tänkande (se även Schmittau 2004, 2005; Schmittau & Morris 2004). Den algebraiska traditionen däremot kännetecknas enligt bland annat Davydov (2008/1986) och Van Oers, förutom att algebraiska symboler tas i bruk redan inom den inledande grundläggande matematikundervisningen, av att eleverna är delaktiga i att formulera matematiska problem och via modeller som lärare och elever gemensamt diskuterar och utvecklar. Diskussionerna ska då fokusera på vad som är den matematiska kärnan i problemen. De problem som har visat sig vara funktionella i sådana diskussioner har en, för det specifika kunnandet, kulturhistorisk tradition. För att utveckla taluppfattning utgår många av uppgifterna i El´konin och Davydovs program därför från jämförelser av kvantiteter. För de yngsta eleverna kan kvantiteterna handla om antal, längder, volymer, areor eller vikter. De modeller som elever och lärare tillsammans utvecklar prövas sedan på olika empiriska

---

algebraic tasks for 7-year-old students - a pilot project inspired by Davydov´s learning activity publicerad I *International Journal för Mathematics Teaching and Learning* samt Eriksson H och Eriksson I (2016) Matematik som teoretiskt arbete - utveckling av matematiska modeller för rationella tal i årskurs 4 publicerad i *Forskning om undervisning och lärande*.

eller aritmetiska exempel. På så vis kan eleverna bjudas in till det Vygotsky benämner som teoretiskt arbete. El´konin och Davydovs program bygger dessutom på att eleverna redan i inledningen av sin formella matematiska utveckling använder principer som finns inom algebran för att utveckla matematiskt tänkande. Inom den matematikdidaktiska forskningen finns ett forskningsområde som kommit att kallas early algebraization där forskare ofta refererar till Davydovs program som exempel på algebraisk undervisning. Radford (2010) diskuterar i det här sammanhanget om algebraiskt tänkande som en zon av olika tänkanden, bland annat en zon han benämner ”factual algebraic thinking” eller ”non-symbolic algebraic thinking” (Radford, 2014) där gester, beskrivningar och bilder utgör tecken på algebraiskt tänkande. Internationella och svenska studier av elever som deltar i detta program har belagt att dessa elever löser matematiska problem med hög komplexitet och att de är aktiva i matematiska klassrumsdiskussioner (se t ex Adolfsson Boman, m fl. 2013; H. Eriksson 2015; Fermsjö 2015; Zuckerman 2007).

El´konin och Davydovs program omfattar på så vis både en idé om undervisningspraktiken genom tanken om att utveckla lärandeverksamheter och en innehållslig dimension utifrån en algebraisk undervisningstradition för själva matematiken (Davydov, 2008/1986; 1990). Detta innebär att såväl undervisningens utformning som det matematiska innehållet är av betydelse för elevernas kunskapsutveckling.

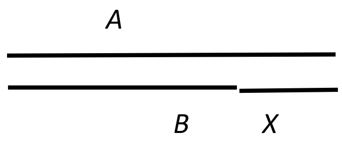
Lektionsexempel

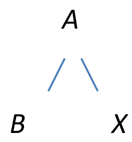
För att en lärandeverksamhet i matematik ska etableras krävs alltså matematiskt utmanande problem där det önskade teoretiska kunnandet potentiellt finns inbyggt, och problem som erbjuder möjligheter för elever att omvandla till lärandeuppgifter (Davydov, 2008/1986). Eleverna behöver erbjudas möjligheter att utveckla och reflektera över modeller för matematiska begrepp i gemensamma diskussioner med hjälp av olika ämnesspecifika redskap. I en av våra lektioner tidigt under höstterminen i årskurs 1 diskuterade vi linjer och sträckor. Vi hade pratat om att en linje inom matematiken kan vara oändligt lång, medan en sträcka har en begränsad längd. Följande dialog utspelar sig;

Fröken:	En sträcka är en sträcka [pekar på en sträcka som finns ritad på tavlan.] Men en linje, kan den vara hur lång som helst? […]
Aron:	Men…man kan inte dra en linje över havet.
Aisha:	Inte över hav.
Fröken:	I matematikens värld…
Abdi:	Reglerna i matematikens värld kan vara…
Fröken:	… kan en linje vara hur lång som helst.

Läraren avbryter här Abdis fundering om hur reglerna inom matematiken kan vara. Men jag tänker att detta är ett exempel som visar att elevernas empiriska erfarenheter behöver diskuteras tillsammans med matematiska begrepp och konventioner.

För taluppfattning kan jämförelser, symboler och tallinjer vara funktionella redskap (Kozulin, 2003). Van Dijk, van Oers, Terwel och van den Eeden (2003) uttrycker att modellerna kan ses som en bro mellan det teoretiskt abstrakta och det konkret empiriska. Några uppgifter ur det matematikdidaktiska programmet vi arbetat med visas i det följande som ytterligare exempel på vad en algebraisk undervisning kan innebära. Först beskrivs en grundtanke i programmet och därefter hur några uppgifter kan ta form tillsammans med eleverna. I programmet möter eleverna att en helhet A ska jämförs med exempelvis delarna X och B, se figur 1 och 2.

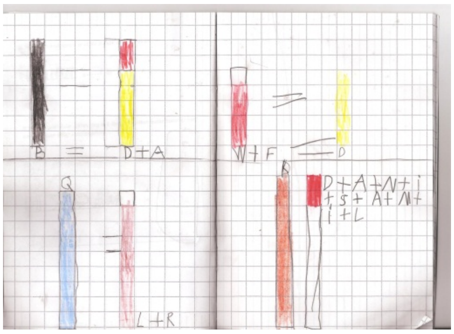




Figur 1. Jämförelsen A = B + X.

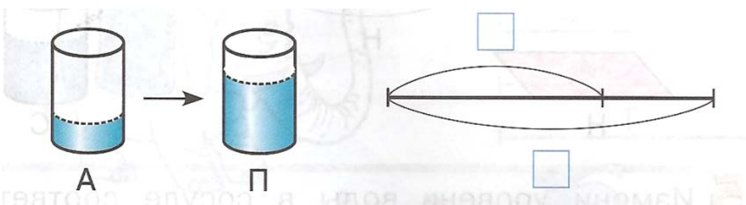
Figur 2. Modell för A = B + X.

I figur 1 jämförs de olika längderna i en modell för A = B + X. I samma figur blir det också synligt att B kan uttryckas som B = A - X och att X kan uttryckas som X = A - B. I figur 2 gestaltas samma additiva relation, det vill säga A = B + X, men utan längder. Arbetet som eleverna involveras i för att diskutera dessa två jämförelser kan se ut så som visas i figur 3. Eleverna jämför olika kvantiteter med hjälp av Cuisenairestavar och bygger likheter (se även H Eriksson, 2016).



Figur 3: Elevarbete

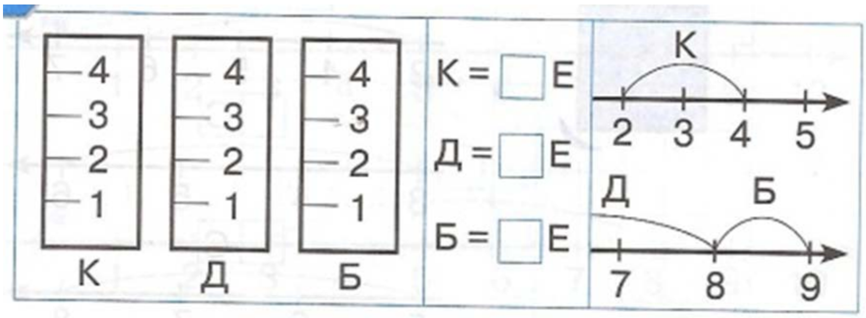
I figur 3 jämför eleverna längder och utvecklar likheter mellan olika långa stavar. De olika längderna benämner eleverna med algebraiska symboler. I en uppgift tagen direkt ur materialet jämför eleverna istället olika kvantiteter med hjälp av volymer (se uppgift 4).



Figur 4: Uppgift ur Matematikka från 2012.

I uppgiften i figur 4 diskuterade vi vilken av bägarna som har störst volym, A eller П. Vi diskuterade att om П har den större volymen kan den volymen representeras av den långa sträckan i linjemodellen. På motsvarande vis kan den mindre volymen, A, representeras av den kortare sträckan i modellen. Linjemodellen kan alltså utgöra en modell för de två olika volymerna. Vi diskuterade en stor och en mindre volym, respektive en lång och en kortare sträcka.

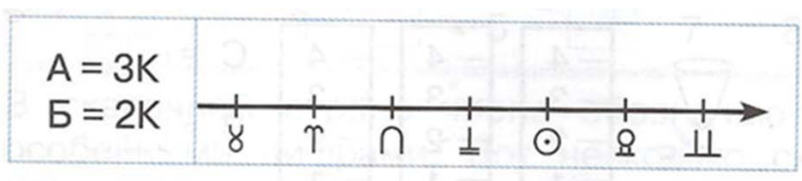
Lite längre fram i materialet finns den uppgift som syns i figur 5.



Figur 5: Uppgift ur Matematikka från 2012.

I den här uppgiften diskuterade vi först vad som var det matematiska problemet. Eleverna resonerade då om att man kunde veta värdet på K genom den tredje rutan. I den rutan finns delar av tallinjer, med så mycket information att värdet av K kan bestämmas. Eftersom man i den mittersta rutan söker en likhet mellan K och E, resonerade eleverna att vi måste anta att enheten för tallinjen i den tredje rutan är E. I den mittersta rutan kan vi därför skriva K=2E. I den första rutan i uppgiften menade eleverna att vi skulle fylla i nerifrån och upp, det vill säga vi skulle fylla ifrån botten i rutan upp till siffran 2. De två följande symbolerna var krångligare. Eleverna valde att börja med Б. Med hjälp av tallinjen i den tredje rutan gick det att bestämma värdet på Б till 1. De övriga rutorna löste eleverna på motsvarande sätt som de gjorde med värdet för K. När vi till slut skulle bestämma värdet av Д gick det inte att bestämma något exakt värde med hjälp av tallinjen. Vi kunde inte veta var på tallinjen markeringen för Д började. Eleverna bestämde att den uppgiften var en fälla. Vi hade inte nog med information för att bestämma värdet, alternativt att vi skulle gissa var den markeringen började. I den här uppgiften fick eleverna använda symboler för ett värde när de resonerade om hur uppgiften skulle lösas i ruta ett och två. Symbolens värde från ruta tre skulle representeras i de två första rutorna. En symbol kan alltså använda för att representera ett värde.

I ytterligare en uppgift, uppgiften i figur 6 nedan, enades eleverna om att problemet var att markera A och Б på tallinjen. Eleverna menade att problemet var att de värden som finns markerade på tallinjen inte stämde överens med de värden som finns noterade för A respektive Б.



Figur 6: Uppgift ur Matematikka från 2012.

För att lösa problemet bestämde eleverna först att enheten på tallinjen var K. Avstånden mellan de olika markeringarna på tallinjen var alltså K. Eleverna bestämde också att värdet på de symboler som markerats på tallinjen ökade i pilens riktning precis som på en ”vanlig” tallinje. En tredje avgörande detalj som eleverna bestämde var startpunkten för A och Б. Eleverna menade att vi måste veta var början på A respektive Б skulle placeras, det vill säga den plats på tallinjen som vi skulle använda som 0 när vi markerade A och Б. (En startpunkt används i programmet innan eleverna börjat använda 0:an i sina matematiska resonemang.) I en av grupperna bestämde eleverna dessutom att uppgiften gick ut på att markera 3K + 2K. Den här elevgruppen bestämde att startpunkten skulle vara före den första markeringen på tallinjen. Kanwar kommer fram till tavlan och för följande resonemang om hur 3K och 2K kan markeras på tallinjen.

Kanwar: Jaa, om A har tre steg … [visar bågar med fingret mellan de tre första symbolerna på tallinjen] …och B har två steg då är det bara två steg kvar [hoppar med fingret i bågar mellan de två följande symbolerna på tallinjen. Tar ner handen genom att göra två bågar i luften med fingret, backar och håller sedan upp två fingrar i luften].

Kanwars resonemang utgör ett exempel på resonemang som kan uppstå utifrån uppgifterna i programmet.

I pilotprojektet har alltså våra elever tagit del av uppgifter liknande de som är presenterade ovan. Uppgifterna är organiserade i teman som fokuserar olika matematiska begrepp. I programmet har vi använt symboler för att konstruera modeller för de begrepp som kan hjälpa till att lösa problemen i uppgifterna. Vi har använt både bokstavssymboler och siffersymboler. Utifrån arbetet med att lösa uppgifter med hjälp av modeller och med hjälp av både siffer- och bokstavssymboler har frågor uppkommit i relation till hur eleverna uppfattar att jämförelser kan genomföras och hur jämförelser kan diskuteras och uttryckas matematiskt.

Syfte och frågeställning

Syftet med denna studie är att genom en fördjupad analys av genomförda elevintervjuer med elever i årskurs 1 som deltar i projektet ”Matematik på lågstadiet genom algebra och problemlösning” besvara frågeställningen:

Vilka uppfattningar av att jämföra kvantiteter ger eleverna som arbetat med El´konin-Davydovs program uttryck för?

Metod

Här beskrivs de intervjuer som genomförts, och grundtankarna i den analysmetod som inspirerat analysarbetet av intervjuerna.

Intervjuerna

Intervjuerna genomfördes som en del i vårt projekt ”Matematik på lågstadiet genom algebra och problemlösning”. Intervjuerna är genomförda under februari månad med elever i årskurs 1 vårterminen 14/15 samt vårterminen 15/16. Intervjuerna dokumenterades med Ipad riktad mot elevernas händer och de klossar eleven plockar med. Varje intervju är ca 6-7 minuter. Totalt har 31 intervjuer genomförts. Under det första projektåret var det totalt 45 elever i årskurs 1 och under det andra projektåret var det totalt 57 elever. De intervjuer som är analyserade är de där inspelningen på Ipad var av sådan kvalitet att analys var möjlig.

Intervjuerna genomfördes som ett samtal där eleverna plockade med klossar och skrev olika matematiska tecken som svar på olika frågor. Frågorna utgjordes av några få förutbestämda frågor som följdes upp av följdfrågor i varje enskilt intervjusamtal. De förutbestämda frågorna och instruktionerna var: Tag ett udda antal klossar ur påsen. Dela upp klossarna i två högar. Hur kan vi jämföra de två högarna? I vissa intervjuer hjälper jag eleverna med frågorna: Kan vi benämna högarna på något sätt? Vad kan vi göra mer med högarna som har med matematik att göra? Dessa hjälpfrågor använde jag när eleverna inte svarade något alls, inte med gester eller inget muntligt svar på frågan hur vi kan jämföra de två högarna. Ibland använde jag som intervjuare även gester och pekade på de två högarna för att förtydliga mina frågor och hjälpfrågor. Det var mestadels till de elever som inte behärskar det svenska språket så väl.

I intervjusamtalen blir eleverna ombedda att dela upp sju klossar i två högar. När eleverna gjort detta och diskuterat hur de gjort blir de ombedda att jämföra antalet klossar i de båda högarna. Eleverna diskuterar dessa jämförelser på olika sätt.

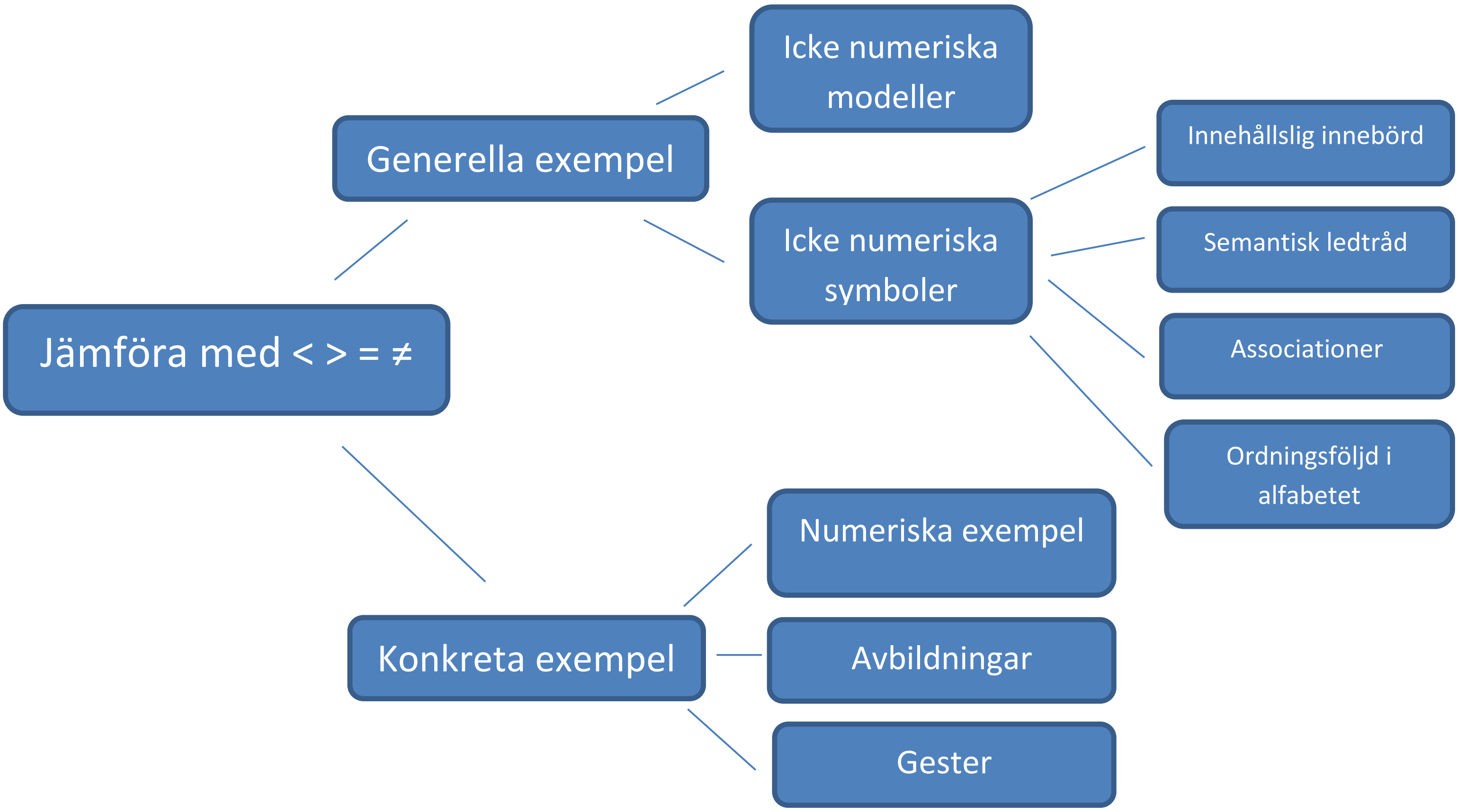
Analysmetod

Datamaterialet består av utskrifter av de elevintervjuer som genomförts med eleverna i årskurs 1. Alla elever som är intervjuade deltar i vårt arbete med El´konin och Davydovs matematikdidaktiska program. Det är endast de avsnitt i intervjuerna som handlar om jämförelser av kvantiteter som har transkriberats. Urvalet av vilka partier av intervjuerna och själva transkriberingen av materialet utgör därför ett första analyssteg. Dessa transkriptioner utgör utsagor för den fortsatta analysen. I transkripten har jag försökt att notera ordagrant vad eleverna säger. Ordföljd, meningsbyggnad och ibland även ordförståelse kan därför vara felaktig. Jag har dock gjort transkripten läsvänliga, det vill säga inte noterat upprepningar, pauser och annat som hör till talat språk. Elevernas namn är fingerade i transkripten. Jag har försökt ge namn som jag känner till från elevernas respektive land. Jag har försökt ge pojkar ett pojknamn och flickor ett flicknamn.

I ett andra analyssteg har utsagorna analyserats genom en fenomenografiskt inspirerad analys. Via tanken inom fenomenografi om ett andra ordningens perspektiv kan aspekter beskrivas av ett specifikt fenomen (i denna studie är fenomenet jämförelser av kvantiteter). Genom att beskriva olika särdrag av handlingar som eleverna utför (i denna studie utgör handlingarna bland annat elevernas gester, vad eleverna säger och hur de lägger klossarna) och sedan tolka dessa särdrag av handlingarna kan uppfattningar av ett fenomen beskrivas (j fr Marton, 2015). Detta andra analyssteg har därför fokuserat att beskriva handlingar (som en analysenhet) när våra elever genomför och diskuterar jämförelserna av antal i intervjuerna. En grundtanke inom fenomenografin är att det i ett utfallsrum av utsagor uppstår alltid en mättnad av särdrag som gör att särdragen kan ses som aspekter av ett fenomen. I analysresultatet nedan är de handlingar som beskrivits i utskrifterna kategoriserade, ibland även som underkategorier, där kategorierna, via särdragen av fenomenet (handlingarna i jämförelserna), kan ses beskriva elevernas uppfattningar av jämförelser. Samtliga handlingar som skulle kunna finnas med i intervjuerna är inte med i resultatdelen, utan de kategorier som analyserats fram är presenterade med något exempel ur datamaterialet.

Analysresultat

Här presenteras ett resultat av den fenomenografiskt inspirerade analysen av elevernas handlingar i relation till att jämföra kvantiteter i elevintervjuerna. Analysen nedan är genomförd i relation till *vilka uppfattningar av jämförelser av kvantiteter eleverna ger uttryck för*. De uppfattningar eleverna ger uttryck för presenteras i det följande som olika kategorier. De olika kategorierna utgör olika nivåer organiserade som ett träddiagram, se figur 7. De olika kategorierna presenteras i löptext efter figuren. Resultatet avslutas med en sammanfattning av analysen.



Figur 7: Schematisk bild av kategorierna

Jämföra med <, >, = och ≠

Denna första och schematiskt övergripande kategori beskriver hur eleverna jämför antalet i de olika högarna vi arbetar med i intervjuerna. Eleverna använder tecknen <,>, = och ≠ för att redovisa de jämförelser de genomför. Samtliga elever använder de fyra olika tecknen <,>, =, ≠ på ett korrekt matematiskt sätt.

För att åskådliggöra hur eleverna använder de olika symbolerna redovisas här tre exempel ur datamaterialet. Misha säger att *”om de varit lika, blir det så här”.* [Misha ritar ett likhetstecken mellan de två högarna av klossar. Intervjuaren tar bort en kloss från högen med fyra klossar.] Misha säger då ”*Nu är det så här*”. [Hon ritar ett streck över likhetstecknet.] En annan elev, Dominique, säger *”Om det är lika så ser det ut så här =.* […] *Det är oavgjort om det är lika.* Dominique säger senare ”*Nu är den här flest”* [och skriver < ”mindre än”]. ”*Flyttar man den här blir den andra flest. Och då ska det vara så här istället.”* [Eleven suddar < ”mindre än”, och skriver > ”större än”.] I en intervju där det är två elever samtidigt säger de att ”*Vi kan jämföra längderna*.” [Frida och Eva ritar både > och < på ett korrekt sätt.] ”*Vi har gjort olika tecken för vi har gjort de här på olika sidor.”* [Eleverna pekar på sina respektive högar. Frida har den största högen till höger, och Eva har den till vänster.]

När eleverna använder de olika matematiska tecknen för att jämföra antalet klossar diskuterar de antingen generellt om jämförelser, det vill säga de ersätter exempelvis ett större antal klossar med en längre sträcka och ett mindre antal med en kortare sträcka, eller så använder de faktiska sifferexempel för att beskriva jämförelserna. Elevernas olika lösningar har organiserats i två olika kategorier, generella exempel respektive konkreta exempel. Först presenteras kategorin *Generella exempel* och alla dess underkategorier. Därefter presenteras kategorin *Konkreta exempel* och alla dess underkategorier.

Generella exempel

I den här kategorin är de olika exemplen först fördelade på de två underkategorierna *Modeller* respektive *Icke-numeriska exempel*. Kategorin *Modeller* har inga underkategorier. Kategorin *Icke-numeriska exempel* är i sin tur fördelade på *Innehållslig innebörd, Semantisk ledtråd, Associationer* samt *Ordningsföljd i alfabetet*. Samtliga kategorier presenteras här nedan. Gemensamt för kategorierna under *Generella exempel* är att eleverna använder symboler och/eller modeller av icke-numerisk karaktär.

Icke-numeriska modeller

Den här kategorin beskrivs av att eleverna jämför kvantiteterna i två högar genom att de konstruerar modeller för antalet i respektive hög. Det är flera elever som menar att man kan göra modeller för att jämföra längder som komplement till att jämföra antal. Exempelvis ritar Diar ett kort streck vid den lilla högen (klossarna ligger inte på rad utan i hög) och ritar ett långt streck vid den stora högen (även här ligger klossarna i hög). Mahamuuds klossar ligger staplade på varandra. Han säger att *”A är störst. Man kan se genom att räkna, men man se utan att räkna, genom att mäta staplarna med klossarna. Vi kan rita staplarna som längder”*. Vidare använder eleverna modellerna genom att peka i dem i diskussionerna om antalet klossar i högarna. Mohammed förklarar hur han gjorde jämförelserna *”när det är många klossar gjorde jag ett streck* [eleven pekar på ett långt streck]. *När det är några klossar gjorde jag mindre streck”.* En elev, Dominique, säger att ”*Man kan lättare jämföra längderna”.* Eleven väljer då att jämföra antalet klossar genom att peka på längderna i stället för på klossarna. Jag tolkar det som att Dominique använder längderna som modeller av antalet. I det här fallet verkar modellen eleven konstruerat förtydliga och underlätta jämförelsen.

Modellen kan ses som ett tankestöd genom möjligheten att peka i vid diskussioner om jämförelser. Ytterligare ett exempel utgörs av följande elevresonemang. En elev diskuterar med sig själv huruvida högen med klossarna och modellen för antalet i högen motsvarar varandra och bör ha motsvarande symbol. Nadiro säger att *”Högen med klossar är A. Då kan strecket vara B. Det kan heta T… Men är dom lika* [pekar på klossarna och på strecket] *måste de heta lika. Jag vet… A”.* Eleven fortsätter med nästa hög och säger då att *”Den högen kan vi kalla B.* [Pekar på den lilla högen.] *Modellen kan vi kalla P. Men kanske B* [pekar på högen och symbolen B]. *Kanske modellen också ska vara B?”*. Nadiro kommer fram till att modellen är en modell av antalet, eftersom modellen och antalet bör symboliseras med samma bokstavssymbol. En sträcka som modell för ett antal kan i de här fallen ses som en abstrakt modell för den aktuella kvantiteten, där eleverna menar att en längre sträcka utgör modell för ett större antal.

Det finns även utsagor där eleverna resonerar precis tvärtom. Elever uttrycker att ett antal och dess modell bör symboliseras av olika symboler, vilket skulle kunna tyda på att eleven inte ser modellen som en modell av det antal den representerar. Ett exempel kommer från Justina som också resonerar med sig själv om jämförelserna, men som kommer fram till motsatsen: *”Den kan heta 3, eller min första bokstav* [skriver bokstaven J under klossarna]. *Den* [pekar på sträckan] *kan heta min första bokstav också, eller min andra. Den är U* [skriver U under sträckan som är en modell av antalet klossar]*”.* Jag tolkar Justinas resonemang som att hon inte ser längderna som någon modell för antalet klossar, utan som enbart en längd.

En fråga man dock kan ställa sig är vad elevernas modeller är modeller av? Elever uttrycker både att ett antal och motsvarande modell bör representeras med samma symbol, vilket kan tolkas som att modellen är en modell för antalet. Men andra elever uttrycker att ett antal och motsvarande modell kan representeras med olika symboler. En fundering att gå vidare med är om eleverna som ritar en godtyckligt lång sträcka konstruerar en mer generell modell än de elever som ritar av den längd eller den area som utgör de staplade klossarna?

Icke-numeriska symboler

Den här kategorin beskrivs av de uppfattningar eleverna ger uttryck för när de använder icke-numeriska symboler för att diskutera om jämförelserna. Dessa icke-numeriska symboler som eleverna använder symboliserar på olika sätt antalen i de två olika högarna. Elever som väljer olika symboler för olika kvantiteter menar att olika antal behöver benämnas med olika symboler. I min analys tänker jag att dessa elever visar förmåga att symbolisera en kvantitet mer generellt än bara med konkreta numeriska exempel. Dessa elever kan även använda sina symboler för att diskutera jämförelserna. Pelle och Josef menar exempelvis att ”*Dom* [eleverna pekar på symbolerna för de olika kvantiteterna] *kan inte vara lika, för de* [Josef pekar på högarna av klossar] *är ju inte lika. Cirkel och triangel är inte lika*”. Tvärtom finns det även de elever som tycker att det skulle vara lättare om de olika kvantiteterna hade samma symbol. När dessa elever diskuterar jämförelserna kan de naturligtvis inte använda sina symboler, de diskuterar endast de konkreta antalen i de specifika jämförelserna vi genomför. Av de elever som använder olika symboler för de olika kvantiteterna väljer de flesta att symbolisera högarna med bokstavssymboler. Ett exempel utgörs av Julius som lägger ihop de två högarna med klossar och säger ”*Vi kan inte kalla den* [högen som är sammanslagen av A och B] *för A och inte för B… För en hög heter A och en heter B och ingen är den där högen. A är mer än B och tillsammans är den ännu mer”*. Julius säger alltså att den nya högen är större än både A och B, den nya högen har en annan kvantitet än A och B, och måste då symboliseras av en tredje symbol. Eleven förtydligar att högarna A och B är olika med kommentaren ”*ingen är den där högen*”. Eleven fortsätter ”*Vet inte vad den nya högen skulle heta… Ö kanske? Tillsammans blir de mycket mer*. Det här utgör ett exempel på hur eleverna diskuterar vad man kan göra med olika kvantiteter med hjälp av symboler istället för att diskutera de konkreta exempel som vi arbetar med just nu. Eleverna diskuterar också förändrade antal med sina symboler. Eleverna menar att det är lättare att diskutera jämförelserna om olika stora kvantiteter representeras av olika symboler ”*Man kan använda bokstäver för att veta vem som är störst…*”

När eleverna använder olika symboler kan man fundera över vad symbolerna är symboler för? När eleverna förklarar vilka bokstavssymboler de använder framkommer fyra olika kvalitativa skillnader i relation till vad respektive symbol symboliserar. Dessa kvalitativa skillnader beskrivs som olika underkategorier för dessa icke-numeriska symboler. Underkategorierna presenteras som; *innehållslig innebörd, semantisk ledtråd, associationer, samt ordningsföljd i alfabetet.*

Innehållslig innebörd

Eleverna ger uttryck för att bokstavssymbolerna har en innehållslig innebörd. När vi prövar att lägga ihop de två högarna säger Nashad att *”Om vi tar y och x och lägger ihop. Det är inte x och det är inte y. Det kan vara z”.* Jag tolkar Nashad som att hon ser att *y* representerar en av högarna, och i just den här jämförelsen representerar *y* antalet som finns i den högen. *Y* kan därför inte användas till något annat antal i just den här jämförelsen. Antalet i den andra högen måste symboliseras med en annan bokstav, och det totala antalet klossar måste slutligen ha en tredje symbol. För att förklara motsvarande handling säger Frida och Eva att *”A är inte lika med Z. Vi har satt ihop dem. Vi har A och Z för att göra B. Vi sätter ihop då använder vi plus. När vi lägger till är det A plus Z som är lika med B”.* Även det här citatet säger eleverna att *A* och *Z* inte är lika. När eleverna har satt ihop dessa två olika *A* och *Z* måste de använda en tredje symbol *B*. Jag tolkar dessa elever som att olika kvantiteter representeras med olika symboler. Symbolerna har inget annat samband med kvantiteterna än att symbolisera dem i elevernas resonemang för jämförelser och för att operera med kvantiteterna.

Semantisk ledtråd

Det finns även en annan innebörd eleverna ger symbolerna. Eleverna använder symbolerna som semantiska ledtrådar på olika sätt. Ett exempel utgörs av att Lotta ger bokstäverna en innebörd som hör ihop med kvantiteterna i högarna. Hon säger: *”Minsta högen och största högen, eller M och S”.* [Eleven skriver M respektive S.]. I den här kategorin utgör första ljudet eller första bokstaven i de ord och begrepp som eleverna använder i sina argument symbolen för kvantiteten. Att första bokstaven i ett begrepp eller en kvantitet blir en symbol har vi även observerat under våra lektioner.

Associationer

Elever använder även första bokstäverna i namn på personer de känner som symbol. Ett exempel utgörs av Wera och Fia. Wera säger *”Men de kan också heta W och F. Det är Wera och Fia. Jag har två lilla syster. Det är jag* [underförstått Wera] *som är störst, då måste det här vara Wera”.* [Eleven pekar samtidigt på högen som har flest klossar.] Ett annat exempel utgörs av Frida och Eva som säger *”Men jag tar A och Z för då blir det min pappa”.* Namnet på familjemedlemmar (och första bokstaven på deras namn) är vanliga symboler. Citaten ovan är bara några exempel. Initialerna från både klasskamraters och familjemedlemmars namn är även vanliga under lektionerna.

Ordningsföljd i alfabetet.

Eleverna kopplar även ihop bokstavssymboler med deras placering i alfabetet. Nadiro sammankopplar det bokstäverna representerar med bokstavens placering i alfabetet. *”Å är störst för den är sist nästan. J är på mitten, 3 är ganska i mitten”.* Bokstavens placering i alfabetet tycks vara av betydelse för vilken bokstav som kan representera vilken hög. Även Julius är inne på samma spår. Summan av de två högarna är den största kvantiteten, och då menar Julius att det borde bli en bokstav som är i slutet av alfabetet. ”*Vet inte vad den nya högen skulle heta… Ö kanske? Tillsammans blir de mycket mer.”* Det här resonemanget känner vi igen även från lektionerna, när vi arbetet med El´konin och Davydovs uppgifter.

Konkreta exempel

Nu backar vi tillbaka till den andra underkategorin under *Jämföra med <, >, =, ≠,* alltså till underkategorin *Konkreta exempel*. Dessa exempel är fördelade på de tre underkategorierna *numeriska exempel, avbildningar, och gester*.

Gemensamt för innehållet under *Konkreta exempel* är att det eleverna säger eller visar är kopplat till de specifika jämförelserna som de genomför i intervjuerna. Innehållet i underkategorierna utgör exempel på hur eleverna genomför jämförelserna.

Numeriska symboler

Elever väljer endast siffersymboler för att benämna de två högarna. En av dessa elever använder de siffror som representerar de respektive kvantiteterna i de två högarna. En annan elev väljer siffror som inte symboliserar rätt antal i högarna. Nusaiba säger ”*… Men de kan inte heta lika, för då glömmer man bort dom. Då kan man inte veta vem som har flest”.* Med att ”glömma bort” beskriver eleven senare att hon menar *”då kan man inte veta vem”.* Jag misstänker att det är svenskan som är elevens andraspråk som försvårar för eleven att förklara exakt vad hon menar. Ingen av de här eleverna diskuterar jämförelser på annat sätt än att jämföra de numeriska värdena i högarna.

Avbildningar

Bayar ritade antalet klossar genom att rita av 4 kanter på alla klossar. Hon säger att ”*Jag ritade som vi gjorde förut. Vi kan rita och visa hur stor den är. Jag ritade som kvadrater istället för streck, som vi gjorde förut*”. Eleven räknade sedan antalet ritade kvadrater för att jämföra vilken hög som innehåller flest. Eftersom eleven räknar antalet ritade klossar tolkar jag det som att eleven inte använder sina ritade kvadrater som en modell utan att de ritade klossarna fortfarande är ett specifikt antal klossar. Frida och Eva ritar också areor av klossarna. Frida säger *”Man kan rita av dem för att jämföra dem”,* när hon ritar av stapeln med klossar. [Hon ritar av alla fyra sidorna på stapeln och konstruerar på så vis en area i from av en rektangel med längden i samma längd som stapeln är hög.] Den här eleven utformar också en area av antalet klossar i de staplar hon byggt. Eleven diskuterar att båda högarna kan symboliseras med samma symbol, *de är ju klossar båda två*, men kommer fram till att de måste ha olika symboler eftersom det ena är klossar och det andra är ritat. När man jämför hur dessa två elever konstruerar areor av klossarna med de som konstruerade modeller tycks det som att de här eleverna som ritade av klossarna inte använder areorna som någon modell för att resonera om antalet på en mer generell nivå. De gör avbilder av klossarna och resonerar om konkreta antal utifrån både de faktiska klossarna och sina avbilder.

Gester

Eleverna pekar inledningsvis på en av de två högarna när jag frågar vilken hög som är störst respektive minst. Många elever kombinerar gesterna med att de förklarar vad de menar med ord. Isa säger exempelvis ”*Den är stor, den här liten”* [samtidigt pekar eleven på högarna med små rörelser]. En annan elev, Pedro, säger ”*Den är större och pekar med fingret.* En tredje elev, Nadiro, gör följande på frågan om högarna är lika. [Eleven pekar fram och tillbaka mellan de staplar han byggt av klossarna.] Eleven säger *Den är fyr och den är tre. Titta den är långare.* [Eleven pekar på den största högen.]

Sammanfattning av elevernas uppfattningar av jämförelser.

Samtliga elever i våra intervjuer använder de matematiska tecknen för jämförelser <, >, = samt ≠ på ett adekvat och korrekt sätt. Våra elever genomför jämförelser med hjälp av modeller, icke numeriska symboler, numeriska symboler, avbildningar, samt gester. Resultatet av analysen visar både på uppfattningar av att jämförelser kan genomföras på en generell nivå där eleverna resonerar med hjälp av en modell och/eller en symbol, och på uppfattningar av att det är enskilda exempel som ska jämförs för varje tillfälle. De utsagor som kategoriserats som de mer generella är när eleverna argumenterar för varför högarna bör benämnas med symboler och/eller representeras som modeller, exempelvis;

Dominique: *Man kan lättare jämföra längderna.*

Nusaiba: *… Men de kan inte heta lika, för då glömmer man bort dom. Då kan man inte veta vem som har flest.*

Diar: *Man kan tänka A+B fast vi ändrade. [Eleven flyttar om antalet klossar i högarna, och pekar på att A fortfarande är högen med flest i.]*

Några elever uttrycker explicit att både modeller och symboler är representationer för högarna, och att modellerna, symbolerna, och högarna därför kan behandlas på samma sätt när de olika kvantiteterna ska jämföras.

Sofia: *Vi kan använda samma tecken mellan bokstäverna som jag gjorde mellan högarna* [Pekar på större än tecknet]. *Vi kan använda den där.*

Dessa elever kan alltså se en orsak till att benämna eller symbolisera högarna för att lättare kunna diskutera jämförelserna.

De utsagor som kategoriserats som att eleverna istället visar på uppfattningar av att varje enskild jämförelse är en egen jämförelse redovisar med antalen i de båda högarna med korrekta siffersymboler eller ritar av varje kloss och anger antalet av dessa ritade klossar.

Diskussion

I den här rapporten har ingen hänsyn tagits till om någon kategori är mer framträdande än någon annan, eller till antalet elever som tar de olika lösningsförslagen i bruk i de olika kategorierna. Fokus för analysen har varit att hitta de olika kategorierna och att analysera hur de kan förhålla sig till varandra. Kategorierna är inte heller analyserade utifrån tidigare forskning om jämförelser av kvantiteter. I bakgrunden redovisas istället exempel på uppgifter där vi arbetat tillsammans med eleverna med jämförelser och där vi symboliserat olika kvantiteter med både siffer- och bokstavssymboler och andra modeller för att genomföra jämförelser i våra forskningslektioner. Samtliga av dessa uppgifter är inspirerade av El´konin och Davydovs matematikdidaktiska program.

Resultatet av analysen visar att våra elever visar uppfattningar av att jämförelser kan genomföras med hjälp av modeller, icke numeriska symboler, numeriska symboler, avbildningar, samt gester. Eleverna visar dessa uppfattningar genom att ta i bruk de redskap som använts i undervisningen för att resonera om jämförelser. De uppfattningar som eleverna ger uttryck för skulle därför kunna vara påverkade av den undervisning eleverna deltagit i. I lektionerna har vi arbetat med modeller i form av sträckor då vi jämfört längder, vikter, areor, volymer och antal. Vi har arbetat med både bokstavssymboler och siffersymboler. Vid något enda tillfälle har vi även arbetat med andra symboler. Vid dessa tillfällen har det alltid varit eleverna som gett förslag på dessa symboler. Eleverna motiverar de olika symbolerna med att de har en innehållslig innebörd, att de har en semantisk innebörd, att de associerar till exempelvis kompisar och familjemedlemmar, samt att de använder bokstavssymbolernas placering i alfabetet som argument för valet av symbol.

Vad kan detta resultat säga oss? Det tycks som om våra elever genomför generella diskussioner i relation till jämförelser med hjälp av andra symboler än siffror och de tar även hjälp av gester och modeller för att resonera om jämförelser av kvantiteter. Vi antar att våra andraspråkselever har nytta av dessa symboler och modeller, genom den möjligheten som dessa olika redskap innebär, för att diskutera jämförelser. Många av våra elever undervisas på sitt andra språk, det vill säga de har annat modersmål än svenska. Många elever behöver därför hjälp att hitta rätt ord för exempelvis den största, den längsta, högen med flest, minst, och så vidare. Med elevernas gester när de pekar var det lätt att veta vilket ord de behövde hjälp att hitta. Det blev tydligt att de visste vilken hög som exempelvis var störst genom att de kunde använda de matematiska tecknen korrekt, och att de kunde konstruera relevanta modeller, trots att de inte kunde säga rätt ord för detta.

Mahamed: *[Mahamad är tyst under nästan hela intervjun. Eleven pekar på den största högen som svar på frågan vilken hög som är störst. Han skriver rätt tecken, ≠ inte lika, mellan högarna, och han säger ingenting på frågan hur högarna kan benämnas för att vi ska kunna diskutera hur de är olika stora. Istället skriver han 4+3 = 7.]*

Mahamed visar att han förstår vilken hög som är störst, och han kan tecknet för ”icke lika”. Jag tolkar ovanstående citat som att Mahamed kan jämföra kvantiteter i två högar. Han använder dock inte någon annan modell än de två högarna, och han använder endast siffersymboler för att operera med högarna.

Utifrån den här rapporten ser jag tre frågor som det är angeläget att arbeta vidare med. 1) Jag skulle vilja ställa de kategorier som framträtt i analyserna i denna studie mot tidigare forskning gällande jämförelser av kvantiteter samt mot tidigare studier inom early algebraization. 2) Jag skulle även vilja analysera materialet utifrån alternativa analysmetoder, kanske till och med göra kvantitativa beräkningar på hur frekventa de olika kategorierna är. 3) Jag skulle också vilja ställa samman de uppgifter vi genomfört under våra lektioner på sådant sätt att det går att genomföra motsvarande lektioner i andra elevgrupper. Hoppas jag får möjlghet att återkomma gällande detta fortsatta arbete vid senare tillfälle.

Referenser

Adolfsson Boman, M., Eriksson, I., Hverven, M., Jansson, A., & Tambour, T. (2013). Att introducera likhetstecknet i ett algebraiskt sammanhang. *Forskning om undervisning och lärande*, nr 10 s. 29-49.

Davydov, Gorbov, Mikulina, & Saveleva. (2012). *Matematikka 1 och 2.* Moskva: VitaPress.

Davydov, V. V. (1990). Types of generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula. *Soviets Studies in Mathematics Education*. nr 2.

Davydov, V. V. (2008/1986). *Problems of Developmental Instruction. A theoretical and experimental psychological study.* New York: Nova Science Publishers, Inc.

Eriksson, H. (2015). *Rationella tal som tal. Algebraiska symboler och generella modeller som medierande redskap.* Stockholm: Stockholms universitet.

Eriksson, H. (2016). Taluppfattning i heterogena elevgrupper. *Nämnaren 2016:1*, s. 8-12.

Eriksson, H., & Eriksson, I. (2016). Matematik som teoretiskt arbete - utveckling av matematiska modeller för rationella tal i åk 4. *Forskning om undervisning och lärande,* nr.4 , s. 6-24.

Eriksson, I., & Jansson, A. (2017). Designing algebraic tasks for 7-year-old students - a pilot project inspired by Davydov's learning activity. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, nr 10, s. 257-272.

Fermsjö, R. (2015). *Rekonstruktion av logaritmer med stöd av tallinjer.* Stockholm: Stockholms universitet.

Kinard, A., & Kozulin, A. (2012). *Undervisning för fördjupat matematiskt tänkande.* Lund: Studentlitteratur.

Kozulin, A. (2003). Psychological tools and mediated learning. i A. Kozulin, B. Gindis, V. S. Ageyev, & M. Miller, *Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context* (ss. 15-38). Cambridge: Cambridge University Press.

Marton, F. (2015). *Necessary Conditions of Learning.* NY: Routledge.

Radford, L. (2010). Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. i V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello, *Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education* (ss. XXXIII-LIII). Universite Claude Bernard.

Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, nr 26, s. 257-277.

Schmittau, J. (2004). Vygotskian theory and mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, nr 19(1), s. 19-43.

Schmittau, J. (2005). The Development of Algebraic Thinking - A Vygotskian Perspective. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik ZDM*, nr. 37 (1), s. 16-22.

Schmittau, J., & Morris, A. (2004). The development of Algebra in the Elementary Mathematics Curriculum of V.V. Davydov. *The Mathematics Educator*, nr. 8 (1), s. 60-87.

Van Dijk, I., van Oers, B., Terwel, J., & van den Eeden, P. (2003). Strategic Learning in Primary Mathematics Education: Effects of an Experimental Program in Modelling. *Educational Research and Evaluation*, nr. 9 (2), s. 161-187.

Van Oers, B. (2001). Educational Forms of Initiation in Mathematical Culture. *Educational Studies in Mathematics*, nr: 46, s. 59-85.

Vygotskij, L. (1986). *Thought and language.* Cambridge, Mass.: MIT Press (Original work published 1934).

Zuckerman, G. (2004). Development of reflection through learning activity. *European Journal of Psychology of Education*, nr. XIX (1), s. 9-18.

Zuckerman, G. (2007). Supporting Children's Initiative. *Journal of Russian and East European Psychology*, nr. 45 (3), s. 9-42.