2005:09

LICENTIATUPPSATS

L

Bokstavliga svårigheter

Faktorer som påverkar gymnasieelevers algebralärande

Per-Eskil Persson

Luleå tekniska universitet
Institutionen för matematik

2005:09 | ISSN: 1402-1757 | ISRN: LTU-LIC -- 05/9 -- SE

Bokstavliga svårigheter

Faktorer som påverkar gymnasieelevers algebralärande

av

Per-Eskil Persson

Institutionen för matematik
Luleå tekniska universitet
SE-971 87 Luleå

Mars 2005

Förord

När Tomas Wennström kontaktade mig på våren 1998 och frågade om jag var intresserad av delta i ett matematikdidaktiskt utvecklingsarbete, anade jag inte att det skulle innebära en viktig vändpunkt i mitt liv. Jag fick för första gången i mitt då ganska långa yrkesliv som lärare möjlighet att vidareutbilda mig såväl teoretiskt som praktiskt inom didaktiken. Den som ledde detta utvecklingsarbete, i samarbete med Tomas, var professor Barbro Grevholm.

Jag har er båda att tacka för så mycket. Tomas för alla fina diskussioner, för ditt kamratskap, för din oförtröttlighet och idérikedom och som verkligt god kollega. Det är i samarbete med dig jag kunnat genomföra stora delar av forskningen som ligger till grund för mitt licentiatarbete. Tack Tomas!

Barbro, du har varit mitt stora stöd i mina studier och mitt forskningsarbete. Du har hjälpt mig på fler sätt än jag kan räkna, du har uppmuntrat mig, hjälpt mig med litteratur och kloka råd, varit min förespråkare när jag behövt medel för forskning och varit en verklig vän och klippa i svårigheter. I licentiatarbetet är du en av mina tre högt uppskattade handledare. Tack Barbro!

Ett speciellt varmt tack vill jag också rikta till mina båda andra handledare, professor Rudolf Strässer och professor Lars-Erik Persson. Rudolf, du är alltid så positiv och stöttande och jag har stor respekt för dina djupa kunskaper inom didaktiken. Lars-Erik, din entusiasm och tro på mig har varit mycket upplyftande och har gett mig en extra skjuts framåt när det varit trögt.

Ett särskilt tack till Nancy Williamson, som mer än en gång bistått mig med råd om korrekt formulering av texter på engelska.

De forskningsstudier, som ligger till grund för licentiatavhandlingen, hade varit svåra att genomföra om de inte stöttats finansiellt, dels genom ett generöst bidrag från Gudrun Malmers Stiftelse, dels genom anslag från Skolverket och slutligen genom att Klippans Barn- och Utbildningsnämnd avsatt viss tjänsteresurs för projektet. Jag vill framföra min tacksamhet till dem, som genom att bevilja dessa anslag, aktivt bidragit till en verksamhetsnära forskning inom svensk skola.

Jag vill också tacka rektorer och andra på Klippans Gymnasieskola, som berett mig tid och möjlighet att utveckla mig som lärare och forskare. Utan det stödet skulle jag inte kunnat gå vidare med min forskning.

Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM, gjorde bland annat det möjligt för mig att delta i den viktiga algebrakonferensen i Melbourne, ”The Future of the Teaching and Learning of Algebra”, 2001. Detta har varit en av de viktigare grunderna för slutförandet av mitt licentiatarbete.

Lärarutbildningen vid Malmö Högskola har också, genom att bevilja medel för mitt slutförande av licentiatarbetet, gett mig det utrymme av tid och rum att skriva färdigt jag behöver. Ert stöd till medarbetarnas professionella utveckling är av stort värde. Tack!

Jag vill också tacka alla elever som tålmodigt och utan att klaga ställt upp på alla tester, intervjuer, enkäter m.m. Utan er hjälp skulle det varit omöjligt att genomföra forskningsstudien.

Slutligen måste jag tacka min familj; min hustru Iréne och mina barn Einar och Agnes. Ni har fått stå ut med många kvällar och lovdagar, när jag arbetat med mina undersökningar eller varit på kurs istället för att vara tillsammans med er. Men ni har alltid varit där för mig när jag behövt er, och jag har fått mycket uppmuntran av er på vägen. Tack för att ni är de ni är!

Per-Eskil Persson

Abstract

Literal difficulties

Factors that influence algebraic learning for upper secondary students

The teaching and learning of algebra has always been a most difficult matter in school mathematics. Teachers have struggled with a great variety of problems with students' understanding of algebraic expressions, equations and functions. These literal difficulties have often been accompanied by the problems of legitimacy. To motivate students for learning algebra, to promote interest and curiosity for it, and to create learning situations that enable students to both develop and succeed, are crucial characteristics of 'exemplary' teaching. These goals are most complicated and hard to achieve and therefore necessary for every mathematics teacher to work with in their classroom practice.

With the aim of making a survey in which factors that facilitate or obstruct students' learning of algebra, a longitudinal study of a group of students at upper secondary school was initiated in 1998. In 2000 a supplementing group was included in the study for the possibility of making comparisons and also for an extension of the research questions. The investigations concluded in 2003, when the last group left school. Results of the study were presented in seven reports, *'Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse'* I – VII. Reports I – V have been published before (see references), and VI – VII are fully included in this thesis. Interested readers are kindly directed to these. In the introductory chapters the research in all seven reports are put into a more general frame of mathematics didactics. In particular, a synthesis is made of the relevant research questions, of results and findings and of general conclusions of the study. Moreover, a discussion of teachers as researchers and suggestions for further research in the field are also included.

The study started as a teachers' development project, effected by myself and a collegue of mine, Tomas Wennström. Our perspective was that of the practitioner and our main concern was how to improve our students' learning of algebra and our own teaching practice. The goals were, however, raised to a higher level after our further education in the didactics of mathematics and the reading of relevant literature. Together with the fact that we

had established good contacts with and support from the university, above all professor Barbro Grevholm, the study could meet all essential criteria for being defined as 'action research'. The later part of the investigations, establishing a coherent theoretical background and making the synthesis of research questions, general results and conclusions, were all completed by me alone.

The aim was to show a comprehensive view of students' learning, but in order to accomplish that the research questions had to be structured into smaller parts. A number of *main factors that influence students' algebraic learning* were identified:

- *Pre-knowledge.* What understanding of concepts and which practical skills within general mathematics and particularly algebra did the students possess when they entered upper secondary school? What type of algebra had they encountered in comprehensive school? What pre-knowledge is most important for algebra learning? What pre-knowledge must a student have to be able to succeed with mathematical studies at upper secondary school?
- *Concept development.* How does the students' understanding of algebraic symbols and expressions change during the different mathematics courses at upper secondary school? Are there crucial points, 'thresholds', in their development that especially must be taken into consideration? What effects could low concept development have and what could the consequences be?
- *Instruction.* What is the actual content of the teaching and learning of algebra and what forms of instruction do students encounter? Is the content consistent with the syllabus? How do technical aids, such as graphing calculators and computers, influence the instruction of algebra?
- *Time for learning.* What is the amount of time students use in learning algebra? What happens when the instructional time is extended, individually or for all students? How effective is lesson time for the students' learning?
- *Interest, attitudes and feelings.* Do the affective factors have any significant importance for learning? Could they possibly compensate for lack of pre-knowledge and an initially low concept development? How do they change over time and what reasons could there be for the change? What is the influence of the social environment in the classroom?

A number of parallel methods were used for the study, both quantitative and qualitative. When the research questions are approached from different angles, the reliability increases if similar results come from different methods. A series of tests of skills and understanding of algebraic concepts made it possible to monitor the students' development of knowledge. Questionnaires and interviews were given, both for investigation of deeper conceptual knowledge and of students' attitudes. Also other written material was collected and notes were made of various observations of episodes in the classroom. One of the great advantages for a researcher, working currently in the classroom, is the opportunity to make many relevant observations, based on a solid personal knowledge of the students.

The conclusions of the investigations of the five main factors that influence algebraic learning for upper secondary students are shortly summarized in the following points:

- Approximately one fourth of the beginners had low pre-knowledge of algebra and also of arithmetic.
- Good understanding of the concept of variables, the use of letters and good number sense are important parts of pre-knowledge, more important than, for example, skills in rewriting algebraic expressions.
- You cannot define the lowest level of pre-knowledge necessary for success in algebra. The most important factors for emerging from a bad initial position are that both the student and the teacher believe that it is possible and that the student gets a certain amount of support at his/her own level.
- The teacher's manner of meeting the students in the classroom are in many ways crucial. The student must be allowed to start from what he/she knows and not from what he/she is supposed to know. Both student and teacher must believe that progress and successful results are possible.
- The importance of good number sense, also for negative and rational numbers, cannot be stressed enough for succeeding with algebra. Without proper number sense, much of simplification algebra will be incomprehensible and the student will make mistakes all the time. If there is a lack in basic number sense, it must be repaired before it can be meaningful to practice simplifications.
- Learning often occurs in leaps, and when one obstacle has been overcome, the student is able to make substantial progress. It is therefore

important that you thoroughly analyze the student's mistakes in order to find the basic reasons for them.

- Many students have difficulty acquiring a structural concept of algebra, and often linger in a purely operational mode. It may take a significant amount of time before the higher abstraction levels for understanding of variables are attained.
- The students' algebra skills from year one were mostly maintained during year two, even if they were not practiced specifically. Algebraic simplification, including handling binomials and polynomials, seems to be relatively stable knowledge.
- Calculators and computers are able to manage all transformations that are part of traditional school algebra. They cannot, however, translate a given problem into an algebraic expression. We must have a continuous debate about what is important mathematical knowledge and why.
- The knowledge from year one is stable at the end of the students' third and last year at upper secondary school. With the extended time for learning in year two, the algebra knowledge from this year also proves stable.
- Affective factors like interest, motivation and self-confidence are most significant for success in algebra learning.
- Peer support and working in small groups are of great importance. Students with low pre-knowledge get much help and substantial benefit from cooperating with higher-achieving students. At the same time these get the opportunity to enhance their own conceptual understanding when they explain to the others.
- The extra support time, that was given to students with low pre-knowledge during year one, proved to be a successful instructional form and resulted in a permanent organization.
- There must be a coordination between syllabi and the time for learning. Otherwise, it will result in poor conceptual development and unstable skills.
- Having enough time for learning is of great importance for the affective factors. Lack of time creates stress and negative attitudes, which have repercussions long after the years at school. Enough time, on the other hand, promotes a meaningful, positive learning and creates possibilities for the students to overcome their literal difficulties.

The various results of this study invoke some new questions about the teaching and learning of algebra. Therefore it is important to make suggestions for further research, some of which might be a direct continuation of what is presented in this thesis. The new research questions are divided into five groups:

- *Pre-algebra and early algebra.* It would be of great interest to study the results of an early start in algebraic education, perhaps in the first grade of comprehensive school. How would this influence the concept of understanding algebra? What new methods for approaching algebra could be used? What would be the implications of these changes in later years? In what ways would students' skills be enhanced by this early start, both in algebra and in other fields of mathematics? Here would also be taken into consideration a change of textbooks and learning materiel for the entire comprehensive school. A strong suggestion would be to make this as a longitudinal action research project, which would involve interested teachers at different schools.
- *Language and algebra.* Algebra is in itself a symbolic language, and it is reasonable to assume that there are great similarities between the mechanisms used when learning a spoken language and algebra. Can an explicit focus on language aspects facilitate student understanding? Is it possible to document the movement from an iconic to an indexical to a symbolic use of algebraic symbols? How could this explain some of the difficulties students encounter in understanding algebraic expressions? Here could also be links to recent brain research on how individuals acquire language and interpret signs.
- *Teaching of algebra.* Little research has been done in Sweden on how teachers actually teach algebra, especially in larger classes with a heterogeneous mixture of students. What aspects of algebra can and ought to be presented, promoted and emphasized? There are several interesting research questions, for example, integration between algebra and other areas within and outside mathematics, tools that can be used to facilitate students understanding, contexts in which algebra is used, and how one works with different algebraic forms. Some good reasons for studying learning in the longitudinal perspective, for example how to avoid leading students into conceptual 'blind allies'. For upper secondary school, it would also be of interest to study the manner in which algebra is taught and used in non-theoretical programmes.

- *The significance of calculators.* Tools with special importance for mediating algebraic thoughts and concepts, such as different types of calculators used in mathematics education, can be categorized as simple, functional, graphing and symbolic. First, it would be of great interest to investigate if and how these calculators are used in all grades of comprehensive school, especially for introducing and developing algebraic concepts. Second, the use of calculators in the compulsory course, 'Matematik A', of upper secondary school should be studied. In all courses on this level, graphing calculators are specifically mentioned, but how are they actually used? Third, what strategies are used for implementing the possible uses of a graphing calculator by students in the natural science program? This implicates also a revaluation of how algebra is taught, but in what manner? The most difficult question for the future is, of course, if and how symbolic calculators and other forms of CAS will change the whole subject of mathematics.
- *The didactical field of Algebra.* In a broad study within the field of algebra, like this, one cannot help noticing how incoherent it is. It is almost as if it consists of several different theories, only very loosely connected to each other or collected merely because they all deal with algebra. Various taxonomies have been constructed, but they do not fit so well together or have different perspectives. Some researchers are interested in symbolism and language effects, others in the transition arithmetic-algebra, different perspectives or approaches and some in mediators and tools. Naturally, some are interested in the humans involved in the learning process and psychological aspects, teachers and teacher education, society's attitude toward algebra and so on. My intention is to construct a new framework for the didactical field of Algebra. This framework shall take into consideration all aspects of algebra and shall be possible to place among relevant ontological, epistemological, pedagogical, social and psychological models. Yet, it is desirable that the model be relatively easy to comprehend and to use both for researchers and for interested teachers and others.

In the didactical field of algebra much research remains to be done and it will certainly take a long time to understand thoroughly how students learn algebra. This thesis is only a small, but hopefully important, contribution to our collective knowledge.

Innehåll

1. Introduktion

Behöver en gymnasielärare som undervisat i matematik i över tjugo år kompetensutveckling i form av fortbildning eller vidareutbildning? Den ämnesteoretiska grunden för hans/hennes lärarexamen var mycket gedigen, och studierna av pedagogik och metodik måste ha varit tillräckliga. Till detta kommer den ovärderliga erfarenhet, som tjugo år i professionen gett. Vad mer finns att tillföra? Frågan måste anses vara berättigad, och den har också ställts i olika sammanhang av skilda befattningshavare, politiker, föräldrar m.fl.

Skolan har genomgått många förändringar under de tjugo år läraren varit verksam. Såväl grundskola och gymnasium har bytt eller reviderat läroplaner och ämnesplaner för matematik flera gånger. Skolan har blivit ”en skola för alla”, där i stort sett alla elever ska kunna klara genomgång av gymnasium och bortåt hälften även utbildning inom universitet och högskola. Ämnet matematik har, liksom skolans samtliga ämnen, övergått till att vara målstyrt med mål som den enskilde läraren har i uppdrag att tolka. Målen är allmänna till sin karaktär och ofta av ”strävans”-karaktär. Den undervisning och den lärandemiljö, som läraren realiserar, prövas i slutänden med nationella prov.

Under tjugo år har det svenska samhället omdanats i ganska stor utsträckning. Synen på skolan och på kunskap i allmänhet har förändrats. Faktakunskaper betonas allt mindre och förmåga att själv söka och kommunicera kunskap har blivit viktigare. Medieutbudet har ökat enormt och dominerar vardagen på ett helt annat sätt än tidigare, samtidigt som denna ter sig ganska olika nu jämfört med då. Det är en formidabel utmaning för alla lärare inom samtliga skolstadier att ständigt förnya sig i sitt arbete för att möta de förändrade villkor man ställs inför i arbetet med eleverna.

Har då lärarens kunskaper och kompetens så stor betydelse för hur eleverna lyckas i skolarbetet? Kanske är det så att med lämpliga läroböcker och med ett ”individuellt arbetssätt” krävs det inte så mycket av matematikläraren, mer än att han/hon finns där för att svara på frågor och hjälpa eleverna förbi alla ”svårigheter”? I Skolverkets rapport ”Lusten att lära – med fokus på matematik” (Skolverket, 2003) har bland annat dessa frågor ställts. Ett avsnitt diskuterar lärarens betydelse och då särskilt ur elevperspektiv:

Läraren anges samstämmigt av eleverna som den absolut viktigaste faktorn för lusten att lära. (s. 34)

Läraregenskaper *som engagemang och förmåga att motivera, inspirera och kunna förmedla kunskap*, förmåga att *anknyta till verkligheten* samt *tilltro till elevernas förmåga* nämns särskilt. Läraren måste delta i lärandeprocessen och kunna identifiera elevers skilda förutsättningar och behov. Och inte minst: läraren måste kunna skapa ett inspirerande arbetsklimat i klassrummet som befrämjar elevernas intresse och sporrar dem att utveckla sin matematiska förmåga.

Räcker det då inte med en god grundutbildning och lång erfarenhet, speciellt om lärarens undervisning i stort sett fungerat bra under alla år? I NCM-rapporten ”Hög tid för matematik” beskrivs syftet med en kompetensutvecklingssatsning:

...att lärare, utifrån aktuell forskning och teorier kring kunskapsbildning, undervisning och utvärdering av matematik, fördjupar och breddar sitt kunnande i relation till den skolform de arbetar i. (Pettersson, Kjellström & Björklund, 2001, s. 131)

Att en lärare på egen hand har möjligheter att ta del av aktuell forskning och att relatera den till epistemologiska och didaktiska teorier för att förbättra sin egen undervisning, är tämligen osannolikt. Så hur är sådan kompetensutveckling möjlig att genomföra i verkligheten?

Matematikdidaktiskt projekt 1998 – 2000

Våren 1998 blev jag kontaktad av Tomas Wennström, lektor i matematik på Klippans Gymnasieskola. Ett matematikdidaktiskt projekt i samverkan mellan Klippans kommun och Högskolan Kristianstad skulle startas. Syftet med projektet var:

- att öka kunskapen i matematikens didaktik och få en orientering om forskningen i ämnet.
- att stimulera till ökat erfarenhetsutbyte mellan matematiklärare på olika stadier.
- att fördjupa kontakten med högskolan.
- att ge lärare bättre möjligheter att genomföra utvecklingsarbeten i egen klass.

Huvudkomponenten i projektet var en nyskapad matematikdidaktisk kurs på 10 poäng, som riktade sig till matematiklärare, som var verksamma inom samliga skolstadier. Kursen utformades och leddes av professor Barbro Grevholm och universitetsadjunkt Jonny Åkesson från högskolan samt Tomas Wennström från kommunen. Den var utlokaliserad till Klippan, men de deltagande lärarna kom från hela regionen i Nordvästskåne. En beskrivning av denna samverkan finns att läsa i två artiklar i Nämnaren (Grevholm & Wennström, 1998, 1999).

Kursen blev oerhört lyckad på flera sätt. För min egen del kom den att utgöra inledningen till en vidareutbildning och professionell utveckling, som både lett fram till denna licentiatavhandling och till att jag lämnat gymnasieläraryrket för att istället arbeta med utbildning av nya matematiklärare. För första gången i mitt yrkesverksamma liv fick jag möjlighet att diskutera matematik och matematikundervisning med lärare, som arbetar med barn och ungdomar i alla åldrar. Speciellt intressant var det att få en inblick i matematikundervisningen för de små barnen och upptäcka att många av problemen var desamma, som de jag som gymnasielärare kunde identifiera hos mina elever. Mina erfarenheter kom att leda till att jag senare tog initiativ till och ledde utvecklingsprojektet ”Den Röda tråden” under åren 2000 – 2003 i Klippans kommun (se Persson, 2004).

Inom didaktikkursens ram skulle en 5-poängsuppsats skrivas, som byggde på undersökningar på de egna skolorna. Undersökningarna skulle riktas mot för deltagarna angelägna områden och kunna utgöra en grund för förbättringar av den egna undervisningen. Tomas och jag hade diskuterat algebrans betydelse i gymnasiets matematikkurser och en tänkbar undersökning av elevernas algebralärande. Denna studie låg till grund för vår gemensamma uppsats, men kom att bli inledningen på ett ännu större projekt.

Förkunskaper i matematik

Hösten 1997 utbröt en debatt i massmedia om de dåliga förkunskaper i matematik, som nybörjarstudenterna på universitets- och högskoleutbildningarna hade med sig från gymnasiet. Speciellt alarmerande var signalerna från civilingenjörsutbildningarna, som i en rad förkunskapstester kunde påvisa kraftigt försämrade färdigheter, särskilt vad gäller algebraisk förståelse och algebraiska manipulationer. En av följderna av dessa problem var att Högskoleverket fick i uppdrag att utreda och analysera de krav på förkunskaper i matematik som ställs inför högskolestudier i matematik. Resultatet beskrivs i rapporten ”Räcker kunskaperna i matematik” (Högskoleverket, 1999).

Slutsatsen av utredningen blev att studenternas genomsnittliga förkunskaper verkligen hade försämrats över en 10-15-års period:

> *Mycket tyder på att åtskilliga studenter har så svaga förkunskaper att det kan bli svårt för dem att tillgodogöra sig den undervisning i matematik som ges vid universitet och högskolor så som den ser ut idag* (s. 11).

Utredningens förslag till den framtida utvecklingen av matematikämnet var att:

- *alla grupper av studerande skall få möjligheter att, inom ramen för rimliga arbetsinsatser, lära sig mera matematik än idag.*
- *matematik och matematikutbildning bör upplevas som intressant och stimulerande av alla elever/studenter.* (s. 13)

Det stod alltså klart att det fanns svårigheter och att de dessutom ytterligare kunde förvärras. Vid läroplansreformen 1994 hade alternativkurserna i matematik för årskurserna 7-9 avskaffats och därmed också kravet på att de elever, som kom in på det naturvetenskapliga programmet på gymnasiet måste ha läst ”Särskild kurs” i matematik. De första elever, som gått ut grundskolan enligt den nya läroplanen, skulle påbörja sina gymnasiestudier hösten 1998. Tomas och jag skulle undervisa i matematik i var sin naturvetarklass. Troligtvis kunde vi förvänta oss att våra nybörjarelever hade en betydligt större spridning på förkunskaperna från grundskolan än vad dittills varit fallet. Vi, och många med oss, undrade hur det skulle vara möjligt att i denna situation stärka undervisningen så att Högskolan kunde avläsa en förbättring när eleverna kom dit.

För att lyckas med matematikstudierna på naturvetenskapligt program, dvs. att klara minst godkänt på kursen Matematik D, finns det en rad kunskaper och färdigheter eleverna måste tillägna sig. Tomas och jag valde ut det område vi anser vara det mest centrala för att gå vidare från ”räkning” till mera avancerad matematik, nämligen algebra.

Algebrans betydelse

För matematikens utveckling har algebran varit av avgörande betydelse. På samma sätt har den en nyckelroll i utvecklingen av elevernas abstrakta tänkande. Vad handlar då algebraiskt tänkande om? Crawford (2001) identifierar tre väsentliga indikatorer:

1. *Ability to think in symbolic language, to understand algebra as generalized arithmetic and to understand algebra as study of mathematical structures.*

2. *Ability to understand equality and equations of algebra and to apply these within real world problem solving settings.*
3. *Ability to understand relationships of quantities through patterns, defining functions, and applying mathematical modelling.* (s. 192)

I dessa tre punkter innehålls allt det vi kallar för skolalgebra, som helt enkelt definieras som den algebra, som behandlas i skolan. Kunskaper och färdigheter i algebra bildar sedan bas för kurser i linjär algebra, differential- och integralkalkyl, trigonometri, differentialekvationer m.fl. högre matematikkurser. Dessa utgör i sin tur den plattform högskolestudier inom matematik, teknik och naturvetenskap bygger på.

Att uppnå vissa, för alla elever gemensamma, mål för algebrakunskaperna har dessutom en ännu bredare betydelse. I boken från den 12:e ICMI-studien *"The Future of the Teaching and Learning of Algebra"* (Stacey, Chick & Kendal, 2004), beskriver MacGregor (2004) skälen för att alla elever bör lära algebra till en viss nivå.

Algebra:

- *Is a necessary part of the general knowledge of members of an educated and democratic society;*
- *Is a prerequisite for further study of mathematics, certain higher education courses, and many fields of employment;*
- *Is a crucial component of mathematical literacy, which underpins a nation's technological future and economic progress;*
- *Is an effective way to solve certain types of problems;*
- *Promotes the intellectual activities of generalization, organised thinking, and deductive reasoning.* (s. 318)

Algebralärandet ses här i ett perspektiv av livslångt lärande och tillämpning. På skolnivå är det självklart med ett F-12-perspektiv, dvs. från förskola till högskola. Den röda tråden i matematikundervisningen kan för algebrans del synas vara extra tydlig. Från *prealgebra* till *tidig algebra* och vidare till s*trukturell algebra* måste en obruten tankeväv byggas. Ett flertal trösklar mellan abstraktionsnivåer och aspekter måste passeras. I Nämnarenartikeln "Behöver alla lära sig algebra?" (Persson, 2002) diskuteras nödvändigheten av algebrakunskaper för varje individ ytterligare.

Algebran är, och har alltid varit, en stötesten för eleverna. Den utgör på mer än ett sätt *bokstavliga svårigheter* i matematiklärandet. Lärare har under alla tider kämpat med att utveckla undervisningsmetoder som underlättar algebraförståelsen och hjälper eleverna att skaffa sig den algebraiska grund de måste stå på för att klara vidare studier och de krav som deras framtida yrke ställer. För Tomas och mig var det ursprungliga motivet för vår undersökning just att vi skulle förbättra vår egen matematikundervisning. Men det visade sig finnas ett vidare intresse.

Projektets väg till examensarbete

Hösten 1998 ansökte Tomas Wennström och jag hos Skolverket om projektmedel för att utvidga vår undersökning till en longitudinell studie. I projektbeskrivningen skrev vi bl.a.:

> *Frågan är då hur vi - utgående från varje elevs individuella förutsättningar - kan ge en god algebraisk kompetens. För att kunna svara på denna fråga behöver vi veta mycket mer om inlärningsprocessen. Ett sätt att få bättre kunskap om denna är att följa ett antal elever under 3 års gymnasiestudier och med olika metoder kartlägga deras utveckling i algebra och vilka faktorer som påverkar denna.*

I ett antal frågeställningar specificerades vad vi avsåg att ta reda på:

- *Vilken algebra skall man kunna och var skall man lära sig den?*
- *Hur påverkar ny teknik algebrainlärningen?*
- *Hur säker skall man vara vid manuella räkningar?*
- *Vilka förkunskaper i algebra är viktiga då man börjar på gymnasiet respektive högskolan?*
- *Vad underlättar och vad försvårar algebralärande?*

Projektet, som även innefattade den tidigare beskrivna didaktikkursen, ansågs från Skolverkets sida så intressant att vissa medel ställdes till Klippans kommuns förfogande för att möjliggöra nedsättning i tjänst för oss båda. För att möjliggöra arbetet med intervjuer, tester, enkäter, skrivande m.m. krävdes ett tillräckligt tidsutrymme. Slutredovisningen av projektet lämnades oktober 2000, och den innehöll bl.a. fyra rapporter, *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse I – IV* (Persson & Wennström, 1999; 2000a; 2000b; 2000c).

För att få ytterligare resurser för genomförandet ansökte vi också om ett stipendium från Gudrun Malmers Stiftelse, som stöder lärare som vill genomföra matematikdidaktiskt forsknings- eller utvecklingsarbete. Även stiftelsen ansåg vårt arbete vara av sådant allmänintresse att det tilldelades medel 1998 med avrapportering 1999. I båda dessa resurstilldelningar var rekommendationerna från professor Barbro Grevholm av stor betydelse för att medlen skulle beviljas.

Matematikdidaktikkursen pågick samtidigt med projektet under två år och gick på åttondelsfart för att möjliggöra för lärarna att delta bredvid sin ordinarie undervisning. Tillsammans med mig fortsatte sedan ett fåtal med en fortsättningskurs på 10 p, som bl.a. innehöll kunskaps- och lärandeteori samt vetenskapsteori. Jag fortsatte även med en kurs i diskret matematik och startade projektet ”Den Röda Tråden” för samarbete mellan matematiklärare över stadiegränserna.

Fastän avrapporteringen till Gudrun Malmers Stiftelse skedde 1999 och till Skolverket 2000, då våra elever gått sin fjärde termin på gymnasiet, stod Tomas och jag fast vid vår föresats att slutföra våra undersökningar först när de tre åren gått. Ytterligare tester och enkäter med eleverna under årskurs 3 gjordes och på hösten 2001 publicerades resultaten i ytterligare en artikel, *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse V* (Persson & Wennström, 2001). Därmed var den longitudinella studien klar, och vi kunde summera och dra våra slutsatser av den.

I juni 2000 pensionerades min kollega och kompanjon Tomas Wennström. I tre år hade vi arbetat sida vid sida med det projekt som låg oss så varmt om hjärtat, och nu skulle vi gå delvis skilda vägar. Det kändes lite tomt, även om Tomas och jag fortsatte vårt samarbete ända fram till hösten 2001. Jag hade emellertid fått en idé om en fortsättning på projektet med en delvis annorlunda angreppspunkt.

Läroplanen för gymnasiet reviderades år 2000, och kursplanerna genomgick en hel del förändringar. För matematikens del innebar det att mer tid gavs för moment som tidigare måst hastas över. Detta borde rimligtvis avspeglas i förändrade kunskaper och möjligen även attityder hos eleverna vid slutet av deras gymnasiestudier. Jag undervisade i en naturvetarklass ur den första årskullen, som studerade enligt de nya timplanerna. Det föll sig naturligt att jag genomförde en serie jämförande undersökningar mellan den tidigare elevkullen och denna senare. Studien genomfördes 2000 – 2003 och publicerades i två ytterligare rapporter: *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse VI -VII – tidsfaktorn* (se rapporterna).

Våren 2003 kom Tomas Wennström med ett oväntat, men mycket spännande förslag. Han undrade om inte de studier jag genomfört tillsammans med honom och på egen hand kunde vara underlag för en licentiatavhandling, och hade också rådgjort om saken med professor Barbro Grevholm. Rapporterna skickades till professor Rudolf Strässer vid Luleå Tekniska Universitet för bedömning. De befanns vara av tillräckligt skick för att, tillsammans med en sammanfattning av arbetet, kunna läggas fram som en licentiatavhandling. Hösten 2003 skrevs jag formellt in som doktorand i matematikens didaktik vid Luleå tekniska universitet. Mitt intresse för didaktik och arbete med andra lärare medförde också att jag samma höst antog en tjänst som lärarutbildare vid Malmö Högskola.

2. Teoretiska grunder

Epistemologi

Konstruktivismen kom genom Piaget att etableras som en ledande teori om lärande och marginaliserade efterhand äldre teorier som exempelvis *behaviorismen*. Piagets kunskapsteori (epistemologi) bygger på tanken att den mänskliga intelligensen under sin utveckling måste genomgå en anpassningsprocess för att inrätta sig efter omgivningen. Varje individ bygger upp begreppskonstellationer och tankescheman (kognitiv struktur), som formas genom *assimilation* och *ackommodation* för att passa dess erfarenhetsvärld. Assimilation sker när nya erfarenheter tolkas och sorteras mot bakgrund av existerande scheman. När dessa inte stämmer med de nya erfarenheterna eller de inte räcker till sker en omstruktureringsprocess, ackommodation.

Ur Piagets teorier har flera olika, men besläktade, former utvecklats. Den *svaga konstruktivismen* baseras på att all individuell kunskap konstrueras aktivt av subjektet och erhålles ej passivt ur omgivningen. Kunskap kan antingen vara objektiv (oberoende av vem som har den) eller subjektiv (personlig). För undervisningen betyder det att man inte kan se det som att kunskap överförs från lärare till elev, utan att eleverna istället själva utvecklar kunskap. Konsekvensen av detta blir att lärarens roll i undervisningen allvarligt måste diskuteras. Björkqvist (1993) skriver:

> *Eftersom varje individ bygger upp sin kunskap kan man ställa sig frågan om det går att undervisa en annan person. Är läraren något annat än en miljöfaktor medan eleven konstruerar sin världsbild?* (s. 9)

För många pedagoger är svaret att eleverna på egen hand ska upptäcka omvärlden med läraren som assistent (*discovery learning*). Läraren bistår med ramen för lärandet och ”skapar en hög sannolikhet för konstruktion av ett visst slag av kunskap” (Björkqvist, s. 9). Exempel på en sådan ram (*frame*) är *problembaserat lärande* (PBL).

Den *radikala konstruktivismen* är en vidareutveckling av Piagets grundläggande teorier, och är i sin moderna version utarbetad främst av von Glasersfeld (1995), men även av Steffe, Cobb m.fl. Ernest (1998) skriver:

> *Den radikala konstruktivismen tänker sig att det lärande subjektet befinner sig i en verklig omgivning som gör motstånd mot och begränsar dess handlingar, men som inte är känd utöver eller ”ovanför” de sätt på vilka dess scheman passar eller inte passar världen.* (s. 25)

Denna form av konstruktivism har blivit mycket framgångsrik och är en av de förhärskande kunskapsteoretiska strömningarna inom matematikdidaktik. Det finns dock en viktig kritik mot att den i ”framställningen av det lärande subjektet alltför mycket betonar individualitet, isolering och primärt kognitiva representationer av sina erfarenheter” (Ernest, 1998, s. 25). Var finns då det sociala samspelet med andra människor, lärare, kamrater, föräldrar m.fl. med i bilden? Hur spelar de affektiva faktorerna som gemensamma känslor, intressen och värdegrunder in?

Vygotskij var samtida med Piaget, men hans teorier blev inte kända förrän långt senare. Den gren av konstruktivismen som vuxit fram kring dessa betecknas *socialkonstruktivism*. Enligt Vygotskij utvecklas människans högre mentala funktioner i ett socialt sammanhang. Vårt medvetande formas i ett nära samspel med det samhälle och den kultur vi växer upp i. Man kan inte studera lärande isolerat från sitt sammanhang, utan det är beroende av i vilken tid och vilken kultur vi lever. Mänskliga subjekt formas genom sin *interaktion* med varandra. Till skillnad från vad tidigare teorier (inklusive Piagets) uttalat ansåg Vygotskij att *lärande är en förutsättning för utveckling*, inte tvärtom. Han definierade *den närmaste utvecklingszonen* (the zone of proximal development) som skillnaden på vad en elev kan göra på egen hand och vad han/hon kan göra med hjälp av en mer erfaren kamrat eller vuxen. I undervisningen är samspelet mellan lärare och elever det viktigaste redskapet för att utveckla elevernas tänkande.

För Vygotskij är de *begrepp* (concepts) man tillägnar sig av central betydelse (Vygotsky, 1978). Han använder termen *internalisering* för att beskriva processen när nya erfarenheter formar det inre medvetandet (se t.ex. Sierpinska & Lerman, 1996). Lärandet är inte tudelat (”teaching” och ”learning”) utan utgör en enda process i skolarbetet. Läraren måste aktivt befrämja lärandet genom att skapa utvecklande situationer som svarar mot var eleven är i sin utveckling och genom att stödja och underlätta (Bruner (1985) använder ordet ”scaffolding”). Det kan i matematikundervisningen innebära att han/hon strukturerar stoffet och arbetet, ger ledtrådar och demonstrerar lösningstekniker m.m. Men det krävs också av eleverna att de visar engagemang och aktivt deltagande i sitt eget lärande och att de tillsammans med läraren skapar ett positivt arbetsklimat i klassrummet.

Interaktionismen förskjuter fokus mot själva lärandeprocessen från den enskilde eleven till den sociala interaktionen i klassrummet. Kommunikationen är den viktigaste faktorn för elevernas inre betydelsekonstruktioner. Bauersfeld (1998) säger följande:

Eftersom det inte finns någon direkt förmedling spelar underhandlandet av betydelser (negotiation of meanings) en nyckelroll vid tillägnandet av adekvata meningskonstruktioner. Därvid uppstår naturligtvis bara ett vetande som gäller för att vara gemensamt (taken-as-shared knowledge), och därmed (implicit) medlen att framställa det.
(s. 60, övers. Engström)

Den symboliska interaktionismen tar fasta på situationer i undervisningen där olika språkliga uttryck används: att tala, skriva, använda bilder och den egna kroppen. För matematiken är *semiotiken* av speciellt intresse i form av de olika representationer de matematiska begreppen kan ges.

För konstruktivismen är inte kunskap ekvivalent med diskurs, och lärarens roll är inte lika central som den är för interaktionismen. Bauersfeld (1995) ser läraren som den som spelar den avgörande rollen i lärandeprocessen:

As an agent for the embedding culture, the teacher functions as a peer with a special mission and power in the classroom culture. The teacher, therefore, has to take special care of the richness of the classroom culture – rich in offers, challenges, alternatives, and models, including languaging. (s. 283)

Risken med interaktionismen är att den tenderar att lägga för stor vikt vid färdighetsträning och mekaniskt lärande (rote learning) och inte vid lärande med förståelse (meaningful learning). Man kan dock se interaktionismen som ett komplement till i synnerhet socialkonstruktivismen, och det kan finnas goda skäl att söka en fusion mellan synsätten, där de eventuellt negativa aspekterna av båda nogsamt undviks.

Ausubels *assimilationsteori* (Ausubel, 1968) innefattar *kognitivt lärande* och *affektivt lärande* där känslor, intressen m.m. påverkar det kognitiva lärandet. Ausubel lägger stor vikt vid *meningsfullt lärande* som motsats till *mekaniskt lärande*:

... meaningful learning is a process in which new information is related to an existing relevant aspect of an individual's knowledge structure.
(Novak, 1998, s. 51)

Teorin bygger på *begrepp* (concepts) och innefattar detaljerade mekanismer för hur dessa införlivas (subsumption), raderas (obliterative subsumption) och differentieras (progressive differentation) i begreppsbygget. Novak påpekar att det finns klara likheter med Piagets assimilation och ackommodation, men också en skillnad:

> *Piaget's cognitive developmental periods refer to general reasoning capacity, whereas my version of Ausubel's assimilation theory holds that reasoning capacity is primarily a function of the adequacy of the relevant conceptual framework a person has in a specific domain of knowledge.* (s. 68)

Ausubels teori har åtskilliga likheter med socialkonstruktivismen och kan sägas utgöra en variant av denna.

Med utgångspunkt i Ausubels teori bygger Novak en teori för lärande (*Theory of Learning*), som innefattar tre former:

- Förvärvande av kunskap (kognitivt lärande).
- Känslomässig förändring (affektivt lärande).
- Prestationsmässig förbättring (psykomotoriskt lärande).

Formerna kan beskrivas med verben ”tänka”, ”känna” och ”göra”, vilket är grunden för att eleverna ska kunna styra sitt eget lärande. Liksom för Ausubel är *begrepp* (concepts) och *samband mellan begrepp* (propositions) centralt för lärandet, och Novak har för detta utarbetat den speciella ram som kallas *begreppskartor* (concept maps). Novak refererar här till Vygotskij med termen *representativt lärande*, som innebär att den lärande känner igen ett ord, ett tecken eller en symbol som en etikett för objekt, händelser eller kategorier av dessa (Vygotskij, 1999). Också för Novak spelar språkets strukturer en avgörande roll för hur människan organiserar sitt eget tänkande och sin egen begreppsvärld. Han vill dock skilja ut sin teori från socialkonstruktivismen och kallar den själv *humankonstruktivism*.

När vårt eget projekt inleddes, kan man inte säga att det var mot bakgrund av någon klart definierad epistemologi eller teori för lärande. Dock var Tomas och mina arbetssätt och den klassrumskultur vi försökt odla sådana, att man kan tala om en obestämd konstruktivism. Detta var ingen följd av didaktiska kunskaper, utan av mångårig lärarerfarenhet och informell kunskap om hur framgångsrik undervisning kan bedrivas. Denna typ av ”erfarenhetskunskap” som lärare i allmänhet bär med sig är inte att förakta, men kan ges en betydligt fastare teoretisk grund genom olika former av didaktisk fort- och vidareutbildning samt förhoppningsvis bedömas och införlivas inom en ram av modern forskning i matematikdidaktik.

Våra diskussioner om var vi står epistemologiskt kom så småningom att placera oss nära socialkonstruktivismens tankar med vissa inslag från interaktionismen, bl.a. genom teorierna om symboler och representationer. Novaks tre former av lärande kom att avspegla sig i frågeställningarna och utgångspunkterna för studien. Vi ville dels utröna elevernas förståelse för de algebraiska begreppen, dels de affektiva faktorernas betydelse för algebralärandet och slutligen hur elevernas prestationer förändrades under gymnasietiden.

Algebra

I den symboliska algebran använder man ett precist sätt att uttrycka olika uttryck och samband. Exakta regler fastställer hur man ska, eller inte ska, skriva om det handlar om en ekvation, en funktion etc. Kan man då tala om algebra som ett egentligt språk? Vygotskij (1999) använder aritmetik och algebra som en parallell till talspråk resp. skriftspråk:

> *Så är skriftspråket också språkets algebra. Men exakt på samma sätt som inlärandet av algebra inte är en upprepning av studiet av aritmetik utan istället representerar ett nytt och högre utvecklingsplan i det abstrakta tänkandet, och omstrukturerar det tidigare etablerade aritmetiska tänkandet och lyfter upp det till en högre nivå, så för språkets algebra – eller skriftspråket – barnet upp på språkets allra högsta abstrakt plan och omstrukturerar därmed också talspråkets tidigare etablerade psykologiska system.*
> (s. 317)

Algebra anges alltså inte uttryckligen som ett språk, utan ligger som grund för en jämförelse mellan olika abstraktionsnivåer. Man måste ändå komma ihåg att för Vygotskij är språkets utveckling av avgörande betydelse för lärandet och därmed utvecklingen av tänkandet.

> *... studiet av algebra höjer det aritmetiska tänkandet till en högre nivå, möjliggör förståelsen av varje slag av aritmetisk operation som ett enskilt fall av algebra och ger en djupare och rikare och samtidigt friare, abstraktare och mer generaliserad syn på operationer med konkreta storheter.* (s. 274)

Vygotskijs syn på algebran följer här tanken "*aritmetik föregår algebra*", som har varit den dominerande inom skolans matematikundervisning i stort sett under alla tider. Men utvecklingsmönstret är kanske inte så enkelt, och hur är det med algebran som språk?

Drouhard och Teppo (2004) delar in förekomsten av symboler och språk i läroböcker i tre kategorier:

- *Naturligt språk* i form av meningar och fraser på svenska, engelska, etc.
- *Symbolisk skrift* med aritmetiska och algebraiska uttryck.

- *Sammansatt representation,* som innehåller både symbolisk skrift och bilder, tabeller, diagram m.m.

Det är en självklarhet att det naturliga språket är ett språk, men även den symboliska skriften, inklusive algebran, innehåller de för ett språk nödvändiga komponenterna: *syntax* (organisation och transformationer av symboler), *semantik* (nivåerna av betydelse) och *pragmatik* (relationen mellan tecknen och deras användare). Viktigt är dock att komma ihåg att även om alla språk består av tecken, så är inte alla *teckensystem* (*semiotiska system*) språk. De sammansatta representationerna har stor betydelse och deras semantik är rik och ibland komplicerad, men de saknar exempelvis syntax. I matematikundervisningen används de flitigt och algebraiska uttryck och samband kan med fördel ges med flera olika sådana representationer.

Drouhard och Teppo skiljer också på *beteckning* (denotation) och *betydelse* (sense) för och av symboliska uttryck. De refererar till Gottlob Freges artikel *Sense and Meaning* från 1892 (se även Arzarello, Bazzini & Chiappini, 2001, 63 ff.). Exempelvis betecknar uttrycken 3(x + 5) och 3x + 15 samma sak, men deras betydelse (hur informationen ges och varför) är olika och möjligheterna till behandling är olika. I ena fallet kan man multiplicera in faktorn 3 och i det andra fallet kan man faktorisera. Om uttrycket uppkommit genom matematisering av en textuppgift, har problemet troligen språkligt uttryckts på olika sätt. Ekvationerna 3(x + 5) = 45 och x = 10 betecknar samma sak men har olika betydelse. Att manipulera algebra och ”lösa ekvationen” innebär alltså att man kan förändra betydelsen av något som betecknar samma sak. Frege delar upp *beteckningar* i fyra fall:

- *Aritmetiska uttryck*, t.ex. $3 \cdot 4 - 5$, betecknar *tal*.
- *Aritmetiska påståenden*, som $18/3+1=7$, är antingen *sanna* eller *falska*.
- *Algebraiska uttryck*, t.ex. $4x+7$, liknar aritmetiska uttryck, men kan beteckna helt andra saker. De kan stå för *aritmetiska mönster*, *funktioner* osv.
- *Algebraiska påståenden*, t.ex. $3x-2=16$, är ekvationer som kan vara sanna eller falska beroende av vilket tal x som väljs. De x som gör ekvationen sann bildar en *lösningsmängd*.

Många av de problem elever har med såväl algebra som aritmetik bottnar i problem med syntaxen eller förmågan att skilja mellan de olika grundfallen ovan. Ett algebraiskt uttryck som $3b+5$ kanske eleven försöker behandla som ett aritmetiskt uttryck och letar efter ett sätt att kringgå problemet med att b inte har något värde. Det finns olika strategier, t.ex. att se bokstaven b som en *kod* för talet 2 (platsvärdet i alfabetet) och sedan ”beräkna” uttrycket med svaret 11.

För att lyckas med algebraiska operationer, måste eleverna uppöva en strukturell förståelse av betydelser och beteckningar. En uppsättning symboler kan tolkas som att de antingen uttrycker en *process* eller ett matematiskt *objekt*. Sfard (1991) beskriver denna dualitet som *operationell* (operational) resp. *strukturell* (structural) uppfattning av uttryck. En operationell uppfattning handlar om processer, algoritmer och aktivt handlande, medan den strukturella uppfattningen ser till egenskaperna hos de matematiska objekten. Hon menar också att det finns ett djupt ontologiskt gap mellan de båda uppfattningarna (s. 4).

Kieran talar i sin översikt *The Learning and Teaching of School Algebra* (1992) om *procedurella* (procedural) och *strukturella* (structural) algebraiska operationer. Hon förklarar dem bl.a. på följande sätt:

> *Procedural refers to arithmetic operations carried out on numbers to yield numbers.*
>
> …
>
> *The term structural,…, refers to a different set of operations that are carried out, not on numbers, but on algebraic expressions.* (s. 392)

Som exempel på procedurella operationer ger hon värdeberäkning av uttryck genom insättning eller lösandet av en ekvation som $2x+5=11$ genom att prova med olika tal för x tills det rätta hittas. Strukturella operationer utförs när algebraiska uttryck förenklas eller när man inleder lösningen av en ekvation som $5x+5=2x-4$ med att subtrahera 2x från båda leden.

Sfards tes är att den ena uppfattningen utvecklingsmässigt nödvändigtvis måste föregå den andra:

> *…we have good reasons to expect that in the process of concept formation, operational conceptions would precede the structural.* (s.10)

Denna utvecklingsordning ställer sig många tvivlande till efter nyare forskning, exempelvis Lins och Kaput (2004). De menar att det finns ett komplicerat samspel mellan de båda uppfattningarna och att man istället måste se dem som två kompletterande sätt att angripa matematiska problem.

Sfard och Linchevski (1994) har betraktat den historiska utvecklingen av algebra och velat koppla den till individens begreppsutveckling. *Retorisk algebra* användes från antiken, via den muslimska kulturen med al Khwarizmi och Omar Khayyam fram till sextonhundratalets Europa. Den är helt och hållet verbal, och det är så dagens skolbarn oftast möter den innan några formella tecken introduceras. De ombeds t.ex. uttrycka ett talmönster med egna ord. Den retoriska algebran är helt och hållet operationell eller processinriktad.

Synkoperad algebra var en form av förkortad retorisk algebra, där orden ersattes med initialer eller andra beteckningar, så att verbala och symboliska uttryck användes i kombination (synkoperat). Diophantos utnyttjade synkoperad algebra redan under antiken, men det var framför allt under en övergångstid på femtonhundratalet den kom att användas (se t.ex. Sfard, 1995). Denna algebratyp var också helt operationell.

Viète brukar anges som den som uppfann den *symboliska algebran* vid slutet av femtonhundratalet. Han använde bokstäver inte bara som symboler för okända tal i ekvationer, utan även som variabler för funktioner och som parametrar. Storheter som Leibniz och Newton vidareutvecklade algebran med regler och konventioner för strukturella operationer, och härefter kom de strukturella aspekterna att dominera. Slutligen utvecklades den *abstrakta algebran* under arton- och nittonhundratalen med de metaregler som styr alla algebraiska system.

Sfard och Linchevski (1994) menar att en individs algebraiska begreppsutveckling i stort följer den historiska, och att dess olika steg måste gås igenom i följd. Först ses algebra som *generaliserad aritmetik* i en operationell fas. Därefter går man vidare till den strukturella fasen, som delas in i *algebra för fixa värden* och sedan *funktionell algebra.* Slutligen tar man steget till den abstrakta algebran.

Kategoriseringen retorisk – synkoperad – symbolisk algebra får tvärtom *inte* misstas för att vara en gradering av individens abstraktionsnivå, menar Radford (1997) och van Amerom (2003). Synkoperad algebra är inget mellansteg i utvecklingen och var från början av teknisk natur, framsprungen ur boktryckarhantverkets krav på förkortningar. Amerom framhåller också att förmåga till matematiskt resonemang och symbolisk färdighet inte nödvändigtvis utvecklas i samma takt hos en viss individ. Exempelvis beror inte ekvationslösningsförmåga enbart på strukturell uppfattning om ekvationer, inte heller enbart på att kunna göra korrekta manipulationer av dem, utan av en ofta komplicerad kombination.

Att flytta fokus från processen till att se processen som ett objekt i sig kallar Sfard och Linchevski *reifikation* (reification). De stora problemen i algebraundervisningen blir med det här synsättet övergångarna mellan faserna, och just dessa övergångar har mycket forskning ägnats åt. Bland det viktigaste har varit hur elever har uppfattat och använt sig av bokstavssymboler.

Quinlan (1992) anger fem hierarkiskt ordnade nivåer av elevers uppfattningar av bokstäver:

1. *Bokstaven ses som ett objekt som saknar mening, eller dess värde fås som bokstavens plats i alfabetet.*
2. *Det är tillräckligt att pröva med ett tal istället för bokstaven.*
3. *Det är nödvändigt att pröva med flera tal.*
4. *Man uppfattar bokstaven som representant för en klass av tal. Det räcker att pröva med något av dessa tal.*
5. *Man uppfattar bokstaven som representant för en klass av tal. Man behöver inte pröva med något av dessa tal.* (övers. Bergsten et al., 1997)

Nivåerna representerar ett försök till steg i en glidande skala från operationella uppfattningar i nivåerna 1-3 till strukturella i 4-5. Ett annat sådant försök är Küchemanns (1978, 1981) sex kategorier av elevers förståelse av bokstavssymboler, baserat på en större undersökning inom CSMS-projektet:

a. *Letter evaluated: The letter is assigned a numerical value from the outset.*
b. *Letter not considered: The letter is ignored or its existence is acknowledged without giving it meaning.*
c. *Letter considered as a concrete object or as a concrete object in its own right.*
d. *Letter considered as a specific unknown: The letter is regarded as a specific but unknown number.*
e. *Letter considered as a generalized number: The letter is seen as representing, or at least as being able to take on, several values rather than just one.*
f. *Letter considered as a variable: The letter seen as representing a range of unspecified values and a systematic relationship is seen to exist between two such sets of values.*

(sammanfattning i Kieran, 1992)

En del av KIM-projektet i Norge bestod också av en kartläggning av förhållningssätt och förställningar elever har till och om algebra och användning av bokstavssymboler (Brekke, 2001). Vissa av testuppgifterna konstruerades och analyserades med utgångspunkt från Küchemanns kategorier. Men dessa kan knappast ses som utvecklingssteg i samma mening som Quinlans. En viss individ vid en viss tidpunkt kan röra sig mellan samtliga kategorier. Det måste dock vara ett tecken på begreppslig och abstrakt utveckling att kunna omfatta allt fler av dem för att till sist vara förtrogen med alla.

En viktig aspekt på algebraiskt kunnande är *förståelse* kontra *färdighet*, ofta i betydelsen mekanisk sådan (rote skills). Ofta förs åsikten fram att man måste förstå innan man kan utföra något, men vad betyder det att förstå algebra? Drouhard och Teppo (2004) anför några kännetecken för vad som innefattas i begreppet förståelse. Eleverna ska kunna:

- tolka symbolisk skrift *flexibelt*.
- använda algebraiska regler på *nya sätt*.
- *förklara* de procedurer de använder.
- förstå *strukturer* i användningen.

Men om eleven ska kunna använda algebra på dessa sätt, krävs att rutinmässiga manipulationer sker utan att alltför mycket ”förståelseenergi” slösas på dem. Mycket av algebran måste automatiseras.

> *Expert behaviour relies on the capability to forget the meaning; it is one of the strengths of algebraic manipulation to be able to work without context, with meaning simultaneously both forgotten but available.*
> (Drouhard & Teppo, 2004, s. 251).

Om en helhetssyn på elevers algebraförmåga ska undersökas, kan man inte ensidigt studera förståelse eller färdighet utan båda dessa, och helst i samverkan. Vid konstruktionen av testuppgifter inom vår algebrastudie togs hänsyn till detta. Exempelvis skulle eleverna i sluttestet i årskurs 3 redogöra för hur de löste ekvationen $\frac{3}{x-2}=\frac{2}{3}$. Grundläggande förståelse för bråk och rationella uttryck kunde då studeras jämsides med den manipulativa skickligheten i att hantera rationella ekvationer. Vissa av uppgifterna var dessutom samma eller liknande dem som föreslagits av Küchemann och andra för att möjliggöra en jämförelse med deras studier. Som ett exempel kan nämnas den uppgift i sluttestet i vilken eleverna ska svara på och förklara frågan: *Vilket är störst, 2n eller n + 2 ?* Frågan är avsedd att testa elevernas förståelse inom Küchemanns kategorier *e* och *f* av elevers förståelse av bokstavssymboler (se ovan) och är hämtad från hans egen forskning (Küchemann, 1978).

Hur uppnår man då i slutänden en förtrogenhet med algebra? Ett svar är att det algebraiska tänkandet måste introduceras tidigt i matematiken, kanske från första året i grundskolan. Den traditionella *”först aritmetik, sedan algebra”* – vägen ifrågasätts på olika sätt, liksom nyttan av att diskutera små utvecklingssteg i algebraförståelsen. Termen *prealgebra* har använts för matematik som inbegriper algebraiskt tänkande men saknar bokstavssymboler. Den *egentliga algebran* har startat först när dessa introduceras. Nu talar man istället om *tidig algebra* när man använder algebraiskt tänkande för att se mönster, förenkla beräkningar m.m. Exempelvis undersöks kommutativa lagen (utan att direkt benämna den så) för addition och multiplikation eller likhetstecknets betydelse redan de första åren i skolan. Tidig algebra inkluderar även det gradvisa införandet och enklare användningarna av bokstavssymboler. Balacheff (2001, s. 25) har nyligen föreslagit en distinktion mellan *symbolisk aritmetik* och *algebra*, där den förra inbegriper all symbolisk hantering som sker operationellt.

Tankarna på en tydlig utvecklingslinje, där algebra uppfattas som generaliserad aritmetik med ett antal steg på vägen, och där utveckling måste föregå lärande, härrör från Piagets konstruktivism. Men om det är tvärtom, som Vygotskij med flera hävdar, då måste riktningen på lärandet inte alls vara så tydlig. Kanske man kan lära sig algebra före aritmetik rentav? Malmer (1996) föreslår ett sådant experiment:

> *Själva ordet algebra (bokstavsräkning) leder tanken till något som ligger långt ifrån nybörjarmatematiken. Men vi skulle kanske rent av starta med prealgebra i stället för med aritmetiken?*
> (Malmer & Adler, s. 73)

Vid ICME-konferensen i Köpenhamn 2004 redogjorde Barbara Dougherty för ett pågående undervisningsexperiment, i vilket nybörjare i skolan under första terminen bara får undersöka algebrans egenskaper och bygga sin egen algebra (se exempelvis Dougherty & Zilliox, 2003). Först under andra terminen inleds aritmetiken med vanliga tal och beräkningar. Insikten att *barn kan göra mycket mer om de får möjlighet* har under 90-talet och början på 2000-talet vuxit sig allt starkare (se ex. Mason, 1991, 1996). Samtidigt tyder forskning på att algebra, som introduceras sent, abrupt och i relativ isolering från annan matematik med fokus på syntax och manipulationer, i stor utsträckning blir misslyckad (se ex. Kaput, 1999*). Istället måste algebraundervisningen gå som en röd tråd från förskolan, genom skolan, gymnasiet till högskolan*. Detta synsätt på algebran fanns hela tiden som en bakgrund till våra frågeställningar och styrde på flera sätt våra ställningstaganden och frågeställningar.

Slutligen något om de sätt man kan närma sig den egentliga algebran. Bednarz, Kieran & Lee sammanfattar dem i introduktionen till *Approaches to Algebra* (1996):

- *Generaliseringsperspektivet:* Algebra är generaliserad aritmetik. Mönster och regelbundenheter vi finner bland de vanliga talen eller i situationer, som skapar vanliga tal, kan beskrivas med algebraisk mall.

- *Problemlösningsperspektivet:* Algebra ska användas för att lösa komplicerade problem. Där aritmetiken fallerar, kommer algebran in och möjliggör lösandet.
- *Modelleringsperspektivet:* Algebra kan skapa modeller av verkliga eller tänkta situationer. Genom att tillämpa algebrans regler kan t.ex. förutsägelser om utfall av experiment kring modellen göras.
- *Funktionsperspektivet:* Algebra uttrycker samband mellan variabler. Funktionerna kan undersökas med hjälp av algebraiska regler och kan ges olika representationer. Funktionsperspektivet leder vidare till den matematiska analysen.

Under 90-talet och 2000-talet har också de *teknologiska verktygen* blivit vanliga i undervisningen, inte bara som ”hjälpmedel” utan efterhand också som bas för vidgade möjligheter att variera och stärka de olika inkörsportarna till algebran. Rätt använda kan grafräknare på ett kreativt och utvecklande sätt användas till uppgifter inom samtliga fyra perspektiv. Det kräver dock en omvärdering av hur algebra introduceras, vilka manipulativa färdigheter eleverna fortsättningsvis måste ha osv. Kieran och Yerushalmy (2004) skriver:

> *There is also a need to establish a different relationship between theory and practice regarding teaching within new environments – one where theory and practice refine each other.* (s. 145)

Drouhard och Teppo (2004) varnar också för att man vid användningen av CAS (Computer Algebra Systems) löper risken av en obalans mellan elevernas förtrogenhet med *beteckning* resp. *betydelse*. Risken finns att man i undervisningen överbetonar den förra komponenten på den andras bekostnad:

> *Students can only acquire the sense of writings after a rather long practice, not simply through having observed a CAS (or a teacher) solve some writings a couple of times.* (s. 236)

I vår egen undervisning försökte vi använda grafräknarna på ett strategiskt och genomtänkt sätt, som vi hoppades stärkte elevernas förståelse snarare än satte gränser för det. Speciellt för funktionsperspektivet diskuterade vi igenom hur introduktion av nya begrepp och öppna, undersökande aktiviteter kunde utföras med grafräknare. Detta var dock inte en av huvudfrågorna för vår studie.

Tid för lärande

En av de faktorer, som efterhand i vår undersökning kom att skjutas alltmer i förgrunden, var den tid eleverna har för lärande. Walberg (1988, 2003) har, utgående från en storskalig kvantitativ studie, identifierat nio psykologiska huvudfaktorer för lärande. De centrala är naturligtvis tidigare kunskaper och färdigheter samt individens utvecklingsnivå, men bland övriga faktorer är tiden för lärande den viktigaste:

> *The positive effect of time is perhaps most consistent of all causes of learning.* (2003, s. 7)
>
> *...then it can be seen that time is a central and irreducible ingredient among the alterable factors in learning.* (1988, s. 78)

Mer tid medför emellertid inte automatiskt bättre kunskaper och färdigheter. Novak (1998, s. 12) hävdar att mer tid *inte* är ett primärt behov för att kunna förbättra lärandet. *Kvaliteten* i tiden för lärande är det avgörande. Walberg pekar på skillnaden mellan den avsatta tiden för matematik och vad han kallar *produktiv tid*:

> *"Productive time" is the time spent on suitable lessons adapted to the learner – in contrast to "engaged" or "allocated" time, which may be futile in the content or method of instruction, is inappropriate for individual students.* (1988, s. 80)

Walberg anger också fyra psykologiska faktorer, som kan stödja och förbättra kvaliteten och förlänga den produktiva tiden:

- *Morale or student perception of classroom social group.*
- *Home environment or "curriculum of home".*
- *Peer group outside school*
- *Minimal leisure-time mass media exposure, particularly television.*
  (2003, s. 46)

Tiden för lärande är alltså inte bara den tillgängliga lektionstiden och läxtiden, utan består av individens hela tid. Utfallet av undervisningen påverkas av attityder i klassrummet, hemma och ute i samhället. Detta stämmer väl både med resultatet av "Lusten att lära" (Skolverket, 2002) och med den analys och de rekommendationer som ges av utredningen "Att lyfta matematiken" (Utbildningsdepartementet, 2004).

För den enskilde eleven är det viktigt att tillräcklig tid finns för ett meningsfullt lärande och då även i algebra. Vissa elever behöver mer tid än andra, i synnerhet om ett meningsfullt lärande ska uppnås. Frågan är bara om mer effektiv tid verkligen kan kompensera andra brister i elevens förutsättningar?

Forskning kring algebralärande i Sverige

Ekenstam och Nilsson (1979) genomförde vid mitten av 1970-talet en större studie av vissa matematikkunskaper hos gymnasiets nybörjarelever. Avsikten med undersökningen var att diagnostisera bevarandet av vissa basfärdigheter i algebra och geometri samt att visa på svåra steg i lärandeprocessen inom dessa områden. De ville också, med utgångspunkt från resultaten, diskutera omfattningen av områdena i grundskolans matematikkurser och hur mycket de betonades där.

Algebrafärdigheterna analyserades ingående med hjälp av en speciellt utvecklad teknik, genom vilken exempelvis en ekvationslösning i detalj bröts ner i sina grundsteg. Varje steg undersöktes sedan i elevtesterna för att utröna vilka som gav eleverna störst svårigheter. Några av resultaten var förväntade, som att rationella uttryck med variabeln i nämnaren innebar mycket större svårigheter än om den fanns i täljaren. Andra resultat visade t.ex. att valet av variabelbeteckning kunde ha stor inverkan. Ekvationen $9x-6=2x$ löstes av 74 % till skillnad från 64 % för ekvationen $9R-6=2R$. Orsaken till denna skillnad måste uppenbarligen sökas i algebran som semiotiskt system. De bokstavliga svårigheterna uppstår i hur själva symbolerna tolkas.

Ett annat viktigt resultat var hur valet av parametrar påverkar lösningsfrekvensen. Ekvationen $6x=12$ löstes av 86 %, men bara 77 % klarade $7x=6$. Problem med aritmetiken, i synnerhet färdigheterna i bråkräkning, måste ligga till grund för sådana svårigheter. Författarna är mycket försiktiga med slutsatser om elevernas generella kunskaper, men ger två viktiga intryck:

- Eleverna tänker mycket i *mönster* vid manipulationer av algebraiska uttryck och ekvationer. Om man ändrar lite på utseendet av en ekvation från det vanliga, t.ex. genom att låta dess båda led byta plats, sjunker lösningsfrekvensen påtagligt.
- Kunskaperna i hur man löser ekvationer eller behandlar algebraiska uttryck har ofta lärts in helt *mekaniskt*. Om en extra ”förståelseingrediens” tillförs en uppgift, blir den oförståelig för många.

Olteanu (2003; Olteanu, Grevholm & Ottosson, 2003) använder som en del i sin undersökning samma teknik som Ekenstam och Nilsson, men har annat fokus för studien:

1. *Att studera hur elevernas algebraiska tänkande utvecklas, hur de rör sig från en uppfattning till en annan samt hur deras kunskaper, färdigheter och attityder till innehållet ändras.*
2. *Att undersöka hur lärare uppfattar sin undervisning i algebra, i vilken utsträckning och på vilka sätt de är medvetna om elevers tänkbara problem med att förstå innehållet samt hur lärare förklarar och hjälper elever som har problem med förståelsen.*

   (författarens översättning)

Olteanu använder, förutom mera gängse metoder, även den intressanta tekniken med videoinspelningar av lektionssekvenser och dialoger mellan lärare och elever. Resultaten visar att lärare och elever ofta inte kan kommunicera på ett djupare plan om elevens kognitiva föreställningar om algebra och vilka operationer man kan och får tillämpa. Det finns betydande skillnader mellan lärarens avsikter och vad som verkligen sker i lärandet, och Olteanu framhåller vikten av att alla lärare är medvetna om detta.

Olteanu (Olteanu, Grevholm och Ottosson, 2004) utvecklar ytterligare sin modell till ett teoretiskt ramverk för analys av de lärandeprocesser i algebra som sker i klassrummet. Modellen beskriver detaljerat de olika former av *interaktion* som sker mellan elev och lärare samt elev och elev, och hur de påverkar utfallet av lärandeprocessen. Centralt i modellen står elevens *diskurs* och som verktyg för studien används Sfards *fokalanalys* (Sfard, 2000, 2002). Perspektivet på lärande och kunskap får anses placera studien inom interaktionismens område.

Jacobsson-Åhl (2003a, 2003b) väljer att studera algebraiskt tänkande ur ett *fenomenografiskt* perspektiv, dvs. utifrån hur människor verkligen agerar när de arbetar med matematik och inte vad de tror eller säger att de gör och tänker. Hon använder och utvecklar verktyget *operationell symbolism*, som tillhandahåller ett *semiotiskt system* för att representera stegen i exempelvis lösandet av ekvationer eller problem. Avsikten är att förbättra insikterna i algebraiskt tänkande hos gymnasieelever, och fokus för studien är synen på algebra i gymnasiets kursplaner samt hur uppgifter ur de nationella proven stämmer med de allmänna målen.

Väldigt lite studier har gjorts i Sverige kring algebraförståelse hos grundskoleelever, i synnerhet från de tidigare åren. Ekenstam & Greger (1987) redogör för en undersökning, som var en del av ARK-projektet. Undersökningen handlade om ”definition och analys av vissa baskunskaper och –färdigheter i elementär algebra” och gjordes med hjälp av intervjuer med elever i årskurs 9, som följde *särskild kurs* i matematik. Uppgifterna var samtliga av ”förklarande karaktär” och var avsedda att undersöka om eleverna kunde tolka eller själva bilda algebraiska uttryck, tolka funktionssamband och förstå innebörden av likhetstecken, minustecken m.fl. algebraiska symboler. Inte helt överraskande fanns det stora variationer i de strategier eleverna använde när de löste uppgifterna, och några av observationerna är av speciellt intresse:

- Eleverna hade förvånansvärt ofta utvecklat egna och ibland helt felaktiga uppfattningar om vad algebraiska uttryck betyder och vilka regler som styr hur de får bearbetas.
- Korrekta svar på uppgifter betyder inte nödvändigtvis att eleven resonerat på ett korrekt eller ens acceptabelt sätt. Intervjuerna visade ofta på felaktigt resonemang baserade på dimmiga eller felaktiga begrepp.
- Många elever blandar ihop algebraiska uttryck med ekvationer.
- Svårigheterna att tolka ett algebraiskt uttryck är större än att skriva ner det.

En del av svårigheterna ovan beror på vad Sfard och Linchevski (1994, s. 116) benämner *pseudostrukturell* uppfattning. När elevens förståelseutveckling bryts, utvecklar han/hon istället ett eget strukturellt system som ”hänger i luften”, dvs. inte har några begreppsmässiga kopplingar till vad som lärts tidigare. Istället letar eleven efter tecken på vad som förväntas och kan då exempelvis ha svårt att skilja mellan andragradsuttrycket $x^2 - 4x + 3$ och andragradsekvationen $x^2 - 4x + 3 = 0$. Eftersom de nästan ser likadana ut, placerar eleven in dem på samma ställe i sitt pseudostrukturella bygge.

Ekenstam och Greger drar flera slutsatser av studien, t.ex. följande:

> *… children are pressed to manipulate (”simplify” and “transform”) algebraic expressions and statements before having developed working “images” of what algebraic expressions “mean” in different contexts and why they should be manipulated.* (s. 314)

De menade att den elementära algebran måste introduceras på ett helt annat sätt och med en delvis annan betoning och ordningsföljd. Frågan är hur genomgripande detta synsätt slagit igenom i grundskolan av idag.

Olteanu (2000, 2001) genomförde en studie bland elever från naturvetenskaps- och samhällsprogrammen. Syftet var att ”undersöka hur deras algebraiska förmåga och förståelse utvecklas genom att välja varierande arbetsformer och innehåll i algebraundervisning” (s. 8). Verktygen bestod av ett brett spektrum av tester, enkäter, intervjuer m.m. för att belysa olika komponenter i elevernas begreppsutveckling och för att kartlägga deras attityder. Undersökningen gjordes som en longitudinell studie under elevernas två första år på gymnasiet och utgick från frågeställningarna:

1. *Varför finner många ungdomar det svårt att förstå sig på bokstavssymboler, även om de t.ex. valt NV-programmet?*
2. *I vilken utsträckning räknar eleverna på olika program med formler och algebraiska förenklingar?*
3. *Hur kan man skapa förståelse och motivation för att använda bokstavssymboler?* (s. 9)

Svaret Olteanu ger på den första frågan består av flera delar som handlar om individens begreppsutveckling, då i första hand kring de algebraiska symbolerna och deras koppling till övrig matematik och kontext i allmänhet. Men det rör sig också om brister i lärandemiljön såsom tidsbrist m.m. Den andra frågan har det uppenbara svaret att behovet av algebra och urvalet inom algebran skiljer sig ganska mycket mellan programmen.

Tredje frågan, slutligen, är komplex men också synnerligen berättigad sett ur elevens synvinkel. Särskilt i grundskolan måste lärarna noga fundera igenom hur algebran ska motiveras. Lins (2001a) för fram *legitimitet* (legitimacy) som en kritisk faktor för algebralärande och menar att en tidig introduktion i algebrans kultur åstadkommer en naturlig legitimitet för bokstavsräkning. Olteanu ser svaret ur en kommunikativ synvinkel. Det gäller att försätta eleverna i situationer där de måste interagera på en hög abstraktionsnivå och där de måste reflektera över sitt eget lärande. Olteanus undersökning har i vissa delar paralleller med Tomas och min studie, men den skiljer sig på väsentliga punkter.

Vår forskningsstudie omfattar en komplett longitudinell studie av algebrakunskaper hos en årskull naturvetarelever under deras tre år genom gymnasiet. Den avser att skapa en holistisk bild av elevernas lärande genom att identifiera och analysera ett antal faktorer, som påverkar algebralärandet, och sedan sätta samman dessa till en helhet. Forskningen har bedrivits verksamhetsnära, eftersom Tomas och jag själva undervisade ungefär hälften av eleverna, och detta har tillfört en personkännedom och metaförståelse av elevernas utveckling som annars skulle ha varit svår att uppnå. Någon motsvarande studie har såvitt vi vet inte beskrivits, varken i Sverige eller i något annat land.

3. Metoder och genomförande

Design och frågeställningar

Studien inleddes som ett lärarutvecklingsarbete (se kap.1) med fokus på hur vi skulle kunna förbättra vår egen undervisning. När den sedan utvidgades till ett matematikdidaktiskt utvecklingsprojekt bevarades detta perspektiv, även om syftet nu var att redovisa resultaten i en betydligt vidare krets. Som lärare är man intresserad av att se till elevernas hela lärandemiljö och av hur olika faktorer för lärande samspelar. Beslutet blev att använda *flera olika undersökningsuppläggningar parallellt* för att sedan väva samman resultaten till en helhet.

Den tyngsta delen av studien bestod av en *kartläggande undersökning* (surveyundersökning) av algebrafärdigheter i form av en testsvit. I den skulle ingå både uppgifter som prövar förståelse för algebraiska begrepp och uttryck och rent manipulativa färdigheter. Med hjälp av intervjuer och essäer gjordes en mera ingående *analys av elevernas begreppsförståelse, uppfattningar och attityder*. En grupp av elever valdes ut för *fallstudier* i vilka deras resultat och attityder följdes över en längre tid. Den extra stödtid, som gavs för elever med svaga förkunskaper (se Persson & Wennström, 2000a), utgjorde ett *undervisningsexperiment* vars följder vi hade möjlighet att upptäcka och värdera. Slutligen granskades styrdokumenten och värderades utifrån den faktiska undervisningssituationen. Speciellt kom läroplansrevideringen år 2000 att utgöra grunden för den senare delen av studien.

Även om en helhetssyn eftersträvades, var det ändå nödvändigt att spalta upp undersökningen. Vi identifierade därför ett antal viktiga *faktorer som påverkar elevernas algebralärande*:

- *Förkunskaper.* Vilka begreppsuppfattningar och vilka konkreta färdigheter inom matematik i allmänhet och algebra i synnerhet hade eleverna då de påbörjade sina gymnasiestudier? Vad hade de mött för algebra i grundskolan? Vilka förkunskaper är speciellt viktiga för algebralärandet? Vilka förkunskaper måste en elev ha för att lyckas med sina matematikstudier i gymnasiet?
- *Begreppsutveckling.* Hur förändras elevernas förståelse för algebraiska symboler och uttryck under den tid de genomgår de olika matematikkurserna i gymnasiet? Finns det avgörande punkter, ”trösklar”, i

utvecklingen som speciellt måste beaktas? Vilka orsaker kan en dålig begreppsutveckling ha och vilka följder får den?

- *Undervisning.* Vilket innehåll har algebraundervisningen och vilka arbetsformer möter eleverna? Stämmer innehållet med aktuella kursplaner? Hur påverkar tekniska hjälpmedel som t.ex. grafräknare eller datorer algebraundervisningen?
- *Tid för lärande.* Vilken tidsram har eleverna för sitt algebralärande? Vad händer om tidsramen utökas, individuellt eller för samtliga elever? Hur effektiv är lektionstiden för elevernas lärande?
- *Intresse, attityder och känslor.* Har de affektiva faktorerna någon större betydelse för lärandet? Kan de rentav uppväga svaga förkunskaper och en från början torftig begreppsutveckling? Hur förändras de över tiden och vilka orsaker kan det finnas till förändringen? Vilken inverkan har den sociala miljön i klassrummet?

Faktorer som vi *inte* undersökte närmare var sådana, som eleverna möter utanför skolan, som *miljön och attityderna till matematik i hemmet*, *kamratattityder till matematik*, *massmedias bild av matematik och matematikundervisning* m.m. Dessa var under de omständigheter vi bedrev vår studie alltför svåra att få grepp om och skulle ha krävt andra undersökningsmetoder än de vi hade möjlighet att genomföra.

En viktig bakgrundförutsättning för studien var naturligtvis min och Tomas *pedagogiska grundsyn*. Denna hade, för var och en av oss, utmejslats under våra år som undervisande lärare och var till största delen baserad på våra yrkeserfarenheter. När studien inleddes, diskuterade vi vid åtskilliga tillfällen hur vi såg på undervisning, elever och lärarens roll. De flesta av våra åsikter stämde väldigt väl överens, vilket lade grunden till den samsyn vi kunde utgå från vid uppläggningen och genomförandet av våra undersökningar samt de slutsatser vi drog av dem.

Våra åsikter stämmer också väl med socialkonstruktivismens tankar om att individen aktivt skapar sin egen begreppsvärld i samspel med andra människor (se kap.2). Varje elev har förmåga att ta ansvar för sitt eget lärande, men det är lärarens uppgift att skapa lämpliga kontexter och lärandemiljöer för att detta lärande ska bli effektivt. Att *undersöka*, *diskutera*, *teoretisera* och *öva* begrepp och färdigheter är centrala matematiska aktiviteter, och en god undervisning måste balansera dessa på ett konstruktivt sätt. Vidare spelar lusten och glädjen med matematiken en stor roll hur undervisningen upplevs och, skulle det visa sig, för resultatet av den. Vår definition av ”lust att lära” överensstämmer väl med den som presenterades i den nationella granskningen:

... den lärande har en inre positiv drivkraft och känner tillit till sin förmåga att på egen hand och tillsammans med andra söka ny kunskap som är betydelsefull för både individens utveckling och samhällets behov. (Skolverket, 2003, s. 6)

Metoder och tidsplan

På grund av att de undersökta grupperna var relativt små, omkring eller strax under 100 individer, var det naturligt att såväl *kvantitativa* som *kvalitativa metoder* skulle användas. De kvantitativa fakta som undersökningen skulle ta fram bestod dels av testresultaten och dels av de summativa resultat eleverna uppnådde på prov och i form av kursbetyg. Kvalitativa fakta erhölls genom enkäter, intervjuer, essäer och observationer samt utvärdering och samtal kring undervisningen. Vi såg det som att de kvantitativa och de kvalitativa metoderna skulle komplettera varandra genom att lyfta fram olika aspekter av lärandet. Resultat som uppnås genom de skilda metoderna kan, om de pekar i samma riktning, stödja varandra och säkra de slutsatser som dras. De statistiska metoder, som kan tillämpas i större surveyundersökningar med en statistiskt bredare population, är knappast tillämpbara på de små grupper som denna studie undersökt. Statistiska mått blir i själva verket så osäkra att man måste ifrågasätta värdet av dem. Kvalitativa metoder, som är bättre avpassade till rentav mycket små grupper, ger här istället stöd för eventuella kvantitativa slutsatser.

Undersökningen genomfördes med två olika grupper av elever, som var för sig representerade en årskull på naturvetenskapligt program (NV) resp. naturvetenskapligt och tekniskt program (NV + TE) i Klippans Gymnasieskola. Den förra gruppen genomförde sina gymnasiestudier 1998 – 2001 och den andra 2000 – 2003. Grupperna studerade med delvis olika läroplan. Grunden för båda var Lpf 94 (Skolverket, 1994), men den senare gruppen var den första årskullen som studerade enligt de reviderade planerna (Skolverket, 2000b). Dessa kom för matematikens del framför allt att påverka den tillgängliga tiden för lärande i form av utökade timplaner, men innehöll även förändringar i innehållet. Bland annat stärktes algebrans ställning i vissa kurser, och nya kurser med visst algebrainnehåll tillkom (se rapport VI). En annan viktig skillnad var att det naturvetenskapliga programmet klövs så att ett tekniskt program avskiljdes. För att jämförelser mellan de båda grupperna skulle kunna göras, måste teknikeleverna inkluderas i den senare delen av undersökningarna. Jämförelseproblematiken utreds närmare i rapport VI.

Den tidsmässiga utläggningen av de olika komponenterna i undersökningen, samt i vilka rapporter de beskrivits och analyserats, ser ut som följer:

År	Termin	NV, 1998-2001 105 elever	Rapport nr.	NV, 2000-2003 78 elever	Rapport nr.
1998	HT	- Förkunskapstest (A) - Enkät (C) - Intervju 1 - Stödtid	I		
1999	VT	- Essä - Stödtid	I, II		
	HT	- Algebratest 1 (D) - Enkät (E)	II		
2000	VT	- Intervju 2 - Algebratest 2 (F)	II IV		
	HT			- Förkunskapstest (A) - Stödtid	VI
2001	VT	- Algebratest 3 (G) - Enkät (H) - Utvärdering	V	- Stödtid	VI
	HT				
2002	VT			- Algebratest 2 (F) - Enkät (J) - Intervjuer	VI
	HT				
2003	VT			- Algebratest 3 (G) - Utvärdering	VII

Antalet elever, som anges i tabellhuvudet, är de som ursprungligen ingick i de båda grupperna och som deltog i förkunskapstestet. Under de tre gymnasieåren sjönk av olika skäl antalet elever. För detaljer om detta hänvisas till rapporterna. Vidare anger bokstäverna A-J som står inom parentes i vilka appendix formulären till tester och enkäter finns. Till komponenterna i tabellen kan tilläggas de *observationer* av såväl enskilda elever som undervisningsgrupper samt *noteringar* av provresultat och betyg, som gjordes kontinuerligt under kursernas gång.

Kommentarer till metoderna

Den första gruppen genomgick fyra *algebratest*, medräknat förkunskapstestet. Testen konstruerades så att de dels innehöll uppgifter med enbart svar och dels uppgifter för vilka hela lösningen krävdes och slutligen öppna uppgifter av förklarande karaktär. Såväl *färdighet* som *förståelse* av algebra samt förmåga att *kommunicera* algebraiska begrepp testades. För att följa elevernas begreppsutveckling valdes tekniken att i ett senare test använda uppgifter som varit liknande eller likadana i ett tidigare test. För enskilda elever och för gruppen som helhet kunde på så sätt eventuella effekter av förändringar i undervisningen eller tiden, glömskeeffekter m.m. konstateras.

För varje test gjordes ett urval av uppgifter avsedda att täcka de huvudområden inom skolalgebran vi ville undersöka: *förmåga att bilda och tolka algebraiska uttryck*, *förenkling av algebraiska uttryck*, *användning av formler*, *ekvationslösning* samt *linjära funktioner*. De flesta av uppgifterna konstruerade vi själva, utgående både från egen lärarerfarenhet av vad som ofta ställer till problem för eleverna och från vår uppfattning om vad som är väsentligt för eleverna att kunna. Det senare avgjorde också fördelningen av uppgifter mellan de olika huvudområdena. Exempelvis fanns det flest uppgifter som provade förmågan att bilda och tolka algebraiska uttryck i förkunskapstestet (se appendix A, B). För att utröna elevernas algebraiska förståelse konstruerades särskilt uppgifter, som kunde placeras in i Quinlans nivåer resp. Küchemanns kategorier (se kap.2). I sluttestet i årskurs 3 ingick också vissa välkända uppgifter som förekommit i tidigare studier, såsom det klassiska ”student-professor” problemet (se Kieran, 1992, s. 393). Därigenom fick vi också möjlighet att knyta våra resultat till teori och annan forskning.

Den andra gruppen fick identiskt lika algebratest som den första, bortsett från att de inte genomgick höstterminstestet i årskurs 2. Direkta likheter och skillnader i lösningsfrekvens kunde på så sätt enkelt göras.

I *enkäterna* skulle eleverna skriva längre förklaringar av vissa begrepp, som exempelvis *ekvation* eller av vad uttryck som $y = x + 5$ innebär. Det fanns också öppna attitydfrågor kring matematik och algebra, som i vissa fall följdes upp med *personliga intervjuer* senare. Ett avsteg från principen med öppna frågor gjordes i enkäten som den andra gruppen gjorde vt 2002. Den innehöll även nio stycken flervalsfrågor med en fyrgradig skala. Kommentarer gick dock att lämna till samtliga frågor.

Huvudparten av de elevsvar som samlades in, såväl tester som enkäter, finns fortfarande arkiverade. Om det i framtiden finns behov av att gå tillbaka till detta ursprungsmaterial för ytterligare undersökningar är detta möjligt att göra.

Intervjuerna utgjorde uppföljningar av enkäterna och var delvis *strukturerade* genom de frågor som upprepades och förtydligades från dessa. Det fanns dock stort utrymme för eleverna att resonera kring algebraiska begrepp, att uttrycka åsikter osv. I den första intervjun, ht 1998, spelades intervjuerna in på bandspelare. Sammanlagt 22 elever intervjuades, varpå dialogen intervjuare-elev skrevs ner som dokumentation. Urvalet av elever var *stratifierat*, utgående från kvaliteten och typen av svar som gavs i enkäten. Transkriberingen skedde med uppspelning på våra något bättre ljudanläggningar hemma, där det också var lättare att pausa bandet medan man skrev ner de olika yttrandena. De fullständiga transkriptionerna finns bevarade, men enbart utdrag har förekommit i våra rapporter.

Intervjuteknik har sina svårigheter, inte minst vad gäller tekniken i sig. Inspelningskvaliteten blev inte bra med de enkla bandspelare vi förfogade över, och ljudet stördes kraftigt av bruset från ventilationsanläggningen i rummet. Dessutom verkade bandspelaren i sig hämmande på en del av eleverna. Eftersom vi kände eleverna väl, kunde vi märka att de inte pratade så fritt som vanligt, utan höll inne med en del av vad de förmodligen tänkt säga. I de följande intervjuerna uteslöts därför bandspelarna och ersattes med enbart anteckningar för dokumentation.

De *observationer* som gjordes, var dels av övergripande karaktär, t.ex. hur den sociala miljön i klassrummet var, hur intresserade eleverna var, hur klassen som helhet reagerade när nya begrepp introducerades etc. Dels gjordes individuella iakttagelser av olika episoder av intresse för undersökningen. Vissa av dessa observationer dokumenterades i dagbok, men det är kanske viktigt att påpeka att en konsekvent dagboksteknik inte användes i vår studie.

Speciellt intressant var observationerna i två fall. Dels gjordes tio stycken fallstudier (se rapport III), för vilka individuella iakttagelser och episoder naturligtvis har stor vikt. Dels gjordes ett mindre undervisningsexperiment i form av den stödtid, som gavs till de elever som hade svaga resultat på förkunskapstestet. Dessa undervisades i små grupper med stor individuell kontakt mellan lärare och elev. Viktigt för experimentet var att en av oss undervisade även under denna tid, vilket vi också såg till. Därigenom underlättades värderingen av experimentet, bl.a. genom de observationer som kunde göras kontinuerligt.

Arbetsfördelning

Studien genomfördes i två huvuddelar. Under den första, som redovisas i rapporterna I – V (Persson & Wennström, 1999; 2000a; 2000b; 2000c; 2001), samarbetade Tomas Wennström och jag i alla delar. Den andra delen, redovisad i rapporterna VI – VII, genomförde jag ensam, även om mycket av testmaterialet var detsamma som vi tidigare utarbetat. Förutom de ytterligare undersökningar som då gjordes, relaterade jag såväl dessa som de tidigare gjorda i högre grad till relevanta teorier och forskning inom framför allt algebraområdet, men även inom andra viktiga områden, exempelvis de affektiva faktorernas betydelse för lärande.

Arbetsfördelningen hade som huvudmål att våra arbetsinsatser skulle bli så lika som möjligt. Övergripande delar, som målformulering för studien, planering av genomförandet, konstruktion av ramen för stödtiden m.m., diskuterade vi fram gemensamt. Tester, enkäter och intervjuprotokoll togs fram som förslag av endera av oss, men utformades slutligen i samråd. Tester och enkäter genomfördes, med bistånd av lärarna för de klasser vi inte själva undervisade i, av var och en för sig. De 22 intervjuerna med transkribering fördelades lika, 11 st. i vardera av våra båda klasser.

Bearbetningen av materialet delades upp mellan oss, och sedan sammanställdes resultaten till en statistisk helhet. Testuppgifter med enbart svar kunde vi rätta var och en för sig, medan längre och förklarande uppgifter krävde en gemensam syn på vad som var acceptabel lösning. Efter det att en rättningsmall diskuterats fram, fick en av oss uppdraget att rätta igenom samtliga elevsvar på en viss sådan uppgift. Därigenom kunde vi undvika skillnader i bedömningen. Tveksamma fall togs upp då vi diskuterade vad resultaten visade och vilka slutsatser vi ansåg oss kunna dra.

Ungefär på samma sätt gjordes med enkätsvaren. En av oss gick igenom samtliga elevsvar på en viss uppgift och gjorde en sammanställning samt, vid något tillfälle, en klassifikation av svarstyperna. Därefter hade vi en gemensam genomgång och diskussion. Det var utan tvekan av mycket stort värde att kunna använda ett ”stereoseende” på materialet. Våra olika kunskaper och perspektiv kompletterade varandra på ett fruktbart sätt och hade utan tvekan en positiv effekt på kvaliteten i vår studie.

Eftersom vi arbetade tillsammans och även delade arbetsrum, kunde vi dagligen tala om erfarenheter och observationer vi gjort i undervisningen. Intressanta sådana antecknades och kunde relateras i rapporterna. Särskilt för fallstudierna (rapport III), men även generellt, gav våra samtal om iakttagelser en god extra bakgrund till vårt övriga material.

Vid skrivandet av rapporten tog vi fram en gemensam disposition och delade upp de olika kapitlen, och ibland avsnitten, mellan oss. Vi gav sedan respons till varandra på det vi skrivit, och till sist sammanfogades delarna till en hel rapport. Ytterligare bistånd fick vi i form av respons från professor Barbro Grevholm, som gav goda råd och värdefulla synpunkter. En sista revidering fastslog slutligen den färdiga rapporten.

4. Presentation av rapporterna

Studien har redovisats i form av sju stycken rapporter. De gavs det gemensamma namnet ”Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse” för att visa att de är delar i en större undersökning. Rapporterna I – V följer fyra klasser från naturvetarprogrammet i Klippans Gymnasieskola från deras inledande termin, hösten 1998, till och med deras sista, våren 2001. Rapporterna visar olika faser och aspekter i elevernas algebraiska utveckling, både på det individuella planet och för gruppen som helhet. De sista två rapporterna, VI – VII, följer tre andra klasser från naturvetenskapsprogrammet och det då nystartade teknikprogrammet i samma skola. Dessa elever började sin gymnasieutbildning hösten 2000 och avslutade den våren 2003. Rapporterna VI – VII har tillnamnet ”tidsfaktorn”, eftersom de huvudsakligen behandlar effekterna av de förändrade timplanerna i läroplansrevideringen år 2000. Genom jämförelser mellan denna senare elevgrupp och den förra avsågs att speciellt undersöka betydelsen av tidsfaktorn för elevernas algebralärande.

Presentationen av de olika rapporterna redogör för vilka syften och frågeställningar de utgår från, vilka metodval som gjordes samt för hur genomförandet skedde. Samtliga resultat och diskussioner kring dessa skildras i kapitel 5.

Rapporterna I – V har tidigare publicerats (se Persson & Wennström, 1999; 2000a; 2000b; 2000c; 2001), varför de inte inkluderats här. Rapporterna VI – VII återges i sin helhet i slutet av avhandlingen. De har dock genomgått en viss teknisk redigering. Samtliga bilagor har samlats i ett enda appendix, sidhänvisningar har ändrats för att följa bokens paginering och referenserna har justerats för att stämma med APA-standarden.

Rapport I

I den första rapporten (Persson & Wennström, 1999) redogörs utförligt för våra olika motiv för att undersöka elevernas algebrakunskaper. Algebrans speciella nyckelroll för fortsatta matematikstudier lyfts fram och även kopplingen till andra delar av undervisningssystemet, då i första hand grundskolans senare år samt universitet och högskolor. En inledande plan för det longitudinella projektet skissas upp med syftet att följa de fyra naturvetarklasserna fram till våren i årskurs 3.

Frågeställningarna, som sedan följer med i hela studien, inriktar sig i stor utsträckning på vad den enskilde eleven måste kunna och hur lärandet sker:

- *Vilka förkunskaper är absolut oundgängliga för att en elev – med rimlig arbetsinsats – skall kunna uppnå en acceptabel färdighet i algebra?*
- *Vad är en "acceptabel algebraisk färdighet" om man skall lyckas med matematiken på naturvetenskapsprogrammet?*
- *Finns det några speciella försvårande hinder för algebralärande?*
- *Är algebralärande något som sker språngvis så att när man övervunnit ett visst hinder gör man väsentliga framsteg?*
- *Vad måste göras för att behålla och stärka uppnådd färdighet?*
- *Vad skiljer den elev som lyckas med algebra och den som misslyckas?*
- *Vilken roll för algebralärande kan grafräknarna spela?*

Metoderna, som avses att användas i studien, presenteras och ges en första kommentar. Rapporten redogör framför allt för fyra av dem:

Vid starten av första terminen gavs eleverna tre stycken *förkunskapstester* inom områdena numerisk räkning, geometri och algebra. För samtliga tre tester sammanställdes statistik över lösningsfrekvenserna på de enskilda uppgifterna. I rapporten presenteras resultaten av algebratestet med kommentarer.

I en *enkät* fick eleverna skriva svar till öppna frågor som: *Vad är matematik? Vad tycker du om matematik? Vad är algebra? Vad tycker du om algebra?* Det fanns också två uppgifter, i vilka man med egna ord skulle förklara dels hur en ekvation ($4x+35=95-x$) skulle lösas och dels vad ett samband mellan två variabler ($y=x+5$) betyder.

Enkäten följdes upp med personlig *intervju* med 22 elever kring deras svar. Ett stratifierat urval gjordes, baserat på de skilda kvaliteterna på svar vi fick på enkäten. Det var av speciellt intresse att få närmare utrett om elever, som lämnat tveksamma eller oacceptabla svar, ändå hade förståelse för vissa begrepp när de fick möjlighet att uttrycka sig muntligt. Eller det kanske var så att de faktiskt saknade förståelse?

Den modell vi utarbetade, som innebar att elever som visade svaga resultat på förkunskapstesterna fick extra *stödtid*, presenteras. *Observationer* gjordes fortlöpande i klasserna, men dessa är naturligtvis av speciellt intresse i stödgrupperna. I rapporten analyseras elevernas algebrasvårigheter och en klassificering görs utifrån tre identifierade huvudtyper:

- *Eleven har brister i sina aritmetiska färdigheter.*
- *Den matematiska abstraktionsnivån är inte tillräckligt hög.*

- *Det logiska tänkandet har inte utvecklats och tränats.*

Rapport II

Denna bygger vidare på det som inletts i förra rapporten, med samma frågeställningar, och summerar vad som hänt under elevgruppens första gymnasieår (Persson & Wennström, 2000a). För första gången tas här de *affektiva faktorernas* betydelse upp som frågeställning:

- *Vad betyder intresse och motivation, självförtroende och känsla av att lyckas för algebralärandet?*
- *Vilken inverkan har kamratstöd och den sociala miljön i klassrummet?*
- *Har arbetssättet någon betydelse i sammanhanget?*

Testen i början av årskurs 2 undersökte vilka framsteg eleverna gjort under det första året, vad de kom ihåg och vad de hade tappat bort igen. Vissa uppgifter, som var likadana eller liknande som i förkunskapstestet, hade tagits med som jämförelse. Dessutom ingick nu inte bara uppgifter med svar, utan även sådana där eleverna skulle presentera en lösning. I rapporten analyseras resultatet av testet i detalj.

En *enkät* av liknande art som den i årskurs 1 gavs till eleverna, och svaren följdes som tidigare upp med *intervjuer*. Attitydfrågorna var av uppföljande karaktär (Vad tycker du om matematik nu? Vad tycker du om algebra och hur tycker du att du klarar algebran?) och de förklarande frågorna hade vässats något i svårighetsgrad med ett ekvationssystem och ett något mer komplext samband.

Stödundervisningen i årskurs 1 hade nu genomförts helt för första gången. En utförlig utvärdering av resultatet ges i rapporten. Dels preciseras syftena med stödtiden, dels beskrivs hur eleverna själva upplevt den och vilken nytta de anser sig ha haft av att få den. De olika svårigheter som observerats hos eleverna analyseras närmare, bl.a. mot bakgrund av aktuell forskning om algebrasvårigheter. Vissa idéer om hur man kan närma sig svåra begrepp i algebran presenteras också.

Vi undersökte även med en kort enkätfråga vilken typ av *elevgruppering* eleverna ingått i då de gick de sista åren i grundskolan. Fanns nivågruppering och hur såg då den ut? Om inte, hur löste då lärarna problemet med en individuellt anpassad undervisning? Frågan väcks också om eventuella kopplingar mellan typ av elevgruppering och färdigheter i algebra.

Rapport III

Karaktären på denna rapport (Persson & Wennström, 2000b) är annorlunda än för de övriga. Den består helt av tio stycken *fallstudier*, baserade på det material som samlades in under elevernas två första gymnasieår. Eleverna stratifierades så att de skulle representera varierande förkunskaper, färdighetsgrader och attityder i våra klasser. De skulle på andra sätt vara lika fördelade, exempelvis könsmässigt så att fem flickor och fem pojkar ingick. Varje "fall" analyserades och diskuterades med utgångspunkt från de frågeställningar som givits i de två första rapporterna. Av särskilt intresse var elever som haft ett dåligt utgångsläge vid starten i årskurs 1, men lyckats förbättra sin situation.

- *Fanns det speciella faktorer som bidragit till att elever med dåligt utgångsläge lyckats?*
- *Varför misslyckades ändå vissa elever, trots att deras förkunskapstest inte indikerade några större problem?*

I rapporten väcks också frågan om hur tidigt i skolan undervisning i algebra ska påbörjas och vilket innehåll undervisningen ska ha under grundskolans olika år. Vilken bild får eleverna av algebra från början och hur påverkar det möjligheterna att lyckas med gymnasiekurserna?

Rapport IV

Huvudfrågorna i den fjärde rapporten (Persson & Wennström, 2000c) är:

- *Hur stabila är elevernas algebrakunskaper?*
- *Hur väl har eleverna lyckas med sina matematikstudier?*

Testet från slutet av årskurs 2 innehöll ett antal liknande uppgifter som i föregående test (se rapport II). Dessa kompletterades med uppgifter som bygger på den algebra som ingått i matematikkurserna under det andra året, främst rationella uttryck och ekvationer samt sådana där logaritmer och trigonometri ingår.

I slutet av testet fanns två frågor, i vilka man med egna ord skulle förklara två centrala begrepp, *ekvation* och *funktion*. Syftet var att undersöka hur väl eleverna kunde uttrycka sig matematiskt i skrift och om de hade en acceptabel bild av två så betydelsefulla begrepp. Frågorna hade inspirerats av en motsvarande undersökning av lärarstuderandes begreppsförståelse, som genomförts av professor Barbro Grevholm.

Rapporten gör en *summering* av hur väl eleverna lyckats med sina matematikstudier på naturvetenskapsprogrammet under de två första åren. Den kritiska gränsen för att man ska anses ha lyckats ansåg vi var att minst betyget Godkänt uppnåtts på kurserna Matematik A – D. Detta är också den gräns som avgör behörigheten till ett antal utbildningar inom universitet och högskola. Särskilt ett par fall, som även behandlats i fallstudierna i rapport III, visar på de kritiska faktorerna och hur dessa avgör hur elever kan lyckas och, tyvärr, misslyckas.

Rapport IV utgör även slutrapport för det matematikutvecklingsprojekt, som anslogs medel till av Skolverket och av Gudrun Malmers Stiftelse.

Rapport V

Med den femte rapporten (Persson, 2001) avslutas den longitudinella studien av de naturvetarklasser som började hösten 1998. De övergripande målen och de metoder som använts för genomförandet summeras, diskuteras och problematiseras:

- *Vilka svårigheter har vi upplevt med att få svar på våra frågeställningar?*
- *Vilka invändningar kan man tänka sig att resa mot de slutsatser vi drar, frågor om validitet och reliabilitet?*

Med testet i slutet av våren i årskurs 3 fullbordades den testsvit, som inleddes med förkunskapstestet (se tabell i kap.3). Syftet var bl.a. att *återigen undersöka vilka algebrakunskaper som var stabila*, varför tekniken med återkommande uppgifter av liknande slag som i föregående test upprepades. Till dessa tillkom ett antal uppgifter, där algebraiska uttryck och samband skulle utredas och förklaras för att visa om en verklig förståelse för dessa fanns. Analysen av svar och lösningar resulterade i en lista på vilka acceptabla kunskaper och färdigheter vi ansåg att eleverna hade eller saknade. Dessa kunskaper utgjorde det algebraiska ”bagage” de hade med sig ut i livet och som exempelvis utnyttjas i högre studier.

Eleverna gavs en sista, summerande enkät kring attityderna till matematik och hur de upplevt den matematikundervisning de fått i gymnasiet. Här väcktes frågan om hur den alltför snävt tilltagna timplanen, främst för kurserna Matematik C och D, påverkat såväl resultat som attityder. Undervisningens innehåll och de arbetssätt vi tillämpat behandlas utförligt, och här ifrågasätts också nivågruppering genom att för- och nackdelar med sådan diskuteras. Som ett alternativ har vi istället arbetat med den speciella stödtid, som gavs till vissa elever med avsikten att kompensera för dåliga förkunskaper och vända negativa attityder.

Ett särskilt avsnitt i rapporten diskuterar den roll som forskande lärare vi iklädde oss under genomförandet av studien. *Vad har arbetet lärt oss om* *forskning inom området lärande och undervisning i algebra? Hur har det påverkat och utvecklat oss i vår profession? Har andra lärare haft möjlighet att dra nytta av det vi funnit? Och hur kan vi gå vidare?*

Rapporten avslutas med en redogörelse för och en sammanfattning av de viktigaste slutsatserna av hela den longitudinella studien.

Rapport VI

I de tidigare rapporterna har tidsfaktorn hela tiden funnits med som en väsentlig förutsättning för elevernas lärande. Den extra stödtiden, som gavs till vissa elever, ansåg vi svarade mot ett grundläggande behov hos dessa, och för övrigt hos alla elever, att precisera och bygga vidare på de begrepp och färdigheter individen behärskar. Bristande tid för lärande identifierades också som en begränsande faktor för hur eleverna lyckades med matematikstudierna, och en av huvudorsakerna ansåg vi var felaktigt dimensionerade timplaner i förhållande till kursernas innehåll. Vid läroplansrevideringen år 2000 ändrades timplanerna så att mera tid fanns till förfogande för matematikämnet. Rapporten (Persson, 2003a) redogör i inledningen för skillnaderna mellan de gamla och de nya planerna. Ändringarna gav impulsen till ett återupptagande av algebrastudien med det speciella målet att undersöka den utökade tidens påverkan på kunskaper, färdigheter och attityder.

De nya frågeställningarna var:

- *Hur påverkas kunskaper och färdigheter inom algebraområden som specifikt getts mer tid?*
- *Har mer tid även en gynnsam effekt för algebrafärdigheterna generellt?*
- *Blev de affektiva faktorerna mer gynnsamma för eleverna?*
- *Lyckas elever med sämre förkunskaper bättre med mer tid?*

Förkunskapstestet hade använts varje år för alla nybörjare på det naturvetenskapliga programmet sedan det konstruerades 1998. Hösten 2000 startade de första eleverna som skulle följa de nya kurs- och timplanerna. Det naturvetenskapliga programmet hade kluvits på så sätt att ett tekniskt program hade avskiljts. För att få till stånd en så rättvis jämförelse som möjligt till föregående elevgrupp togs samtliga elever i de två nya programmen med. Resultatet av förkunskapstestet visade på likheter och skillnader i de förutsättningar, som eleverna gick in i gymnasiestudierna med och som kunde påverka utfallet av undervisningen på olika sätt.

Eleverna gavs i slutet av årskurs 2 exakt samma test som föregående grupp. Analysen och diskussionen visar på likheter, men också på väsentliga skillnader i lösningsfrekvens mellan de båda grupperna. Den intressanta frågan är om dessa skillnader verkligen kan härröras till utökningen av timplanerna eller kan tänkas ha andra orsaker. Viktiga skillnader i förkunskaper följdes också upp i testresultaten och gavs möjliga förklaringar.

I en nykonstruerad enkät ställdes ett antal attitydfrågor kring matematik och algebra (*Hur viktigt är det? Hur svårt är det?*) och även en speciell fråga om timplanen i kurserna Matematik C och D. Här fanns möjlighet att uttrycka åsikter om huruvida tiden var för knapp, var tillräcklig eller rentav var för lång i förhållande till målen. I öppna frågor fick också eleverna kommentera matematikundervisningen de mött på gymnasiet.

I sammanfattningen av rapporten anges ett antal slutsatser man kan dra av resultaten av testet och vad eleverna svarade på enkäten. Vilka färdigheter hade förbättrats, försämrats eller visade ingen förändring? Hur hade de affektiva faktorerna påverkats? Och räckte undervisningstiden verkligen till nu?

Rapport VII

Den sista och avslutande rapporten (Persson 2003b) hade som mål att *kontrollera* och *säkerställa* de preliminära slutsatser om tidens betydelse, som dragits i rapport VI:

- *Var de påvisade förändringarna stabila och hade eleverna kvar sin positiva inställning till matematiken?*
- *Vilka förändrade förkunskaper i algebra kan avnämare från universitet och högskolor förvänta sig jämfört med tidigare?*

Det avslutande testet på våren i årskurs 3 upprepades med den nya gruppen elever, och resultatet jämfördes liksom tidigare med den tidigare gruppens. Testet åtföljdes av ett uppföljande samtal med eleverna kring resultatet. Analysen åtföljs i rapporten av en noggrannare klassificering av de enskilda testuppgifterna och vad de avsåg att visa om elevernas färdigheter och förståelse.

I samtalet och utvärderingen av matematikundervisningen uttryckte eleverna på nytt sina tankar kring vad som varit bra eller mindre bra. Vi diskuterade speciellt hur det sociala klimatet varit i klassen och hur samarbetet mellan eleverna i form av par- eller grupparbete fungerat.

Rapporten avslutas med en summering av vilka kunskaper som förbättrats, vilka som inte ändrats samt vilka som trots allt blivit sämre. Frågan ställs också om det är möjligt att ytterligare förbättra tidsanvändningen i matematikkurserna och förstärka en positiv tendens. Ett sätt skulle kunna vara att mera strategiskt föra in grafräknare och symbolhanterande räknare i matematikundervisningen, kanske redan på grundskolenivå. Fanns det indikationer i studien på att detta vore en framkomlig väg?

5. Diskussion av resultaten

Studiens övergripande mål är att undersöka vilka faktorer som påverkar gymnasieelevers lärande. De viktigaste faktorerna identifierades och förklarades i kapitel 3. I diskussionen av resultaten och de slutsatser man kan dra av dem behålls denna indelning, även om faktorerna givetvis på många sätt går in i varandra. En avslutande sammanfattning i slutet av kapitlet fogar samman delarna till en helhet. Diskussionen om slutsatsernas giltighet, om validitet och reliabilitet, förs i kapitel 7.

Förkunskaper

De algebrafärdigheter eleverna bär med sig från grundskolan till gymnasiet varierar mycket i dagens skolsystem. Detta gäller även de elever som väljer naturvetenskapligt program, ett teoretiskt program som ska kunna leda fram till olika matematikintensiva universitets- och högskoleutbildningar. Det är därför en viktig uppgift för gymnasieskolan att ta emot dessa elever där de befinner sig i sin matematiska utveckling och på ett riktigt sätt stödja och förstärka denna.

I rapport I konstaterades att förkunskaperna i algebra var goda för ungefär en fjärdedel av eleverna, acceptabla för hälften och dåliga för en fjärdedel. Testresultaten stämde väl med de observationer som gjordes i undervisningen av vilka elever som hade uppenbara, bokstavliga svårigheter. Det var främst säkerheten i de manipulativa färdigheterna som saknades, exempelvis förenkling av uttryck och lösning av vissa ekvationer. Specialregler, som kvadreringsreglerna eller binommultiplikation, klarade ytterst få. Något bättre gick det med insättning i uttryck samt uppställning och tolkning av algebraiska uttryck. Enkla ekvationer, i vilka enbart en räkneoperation ingick, klarades också av de flesta.

Vidare gjordes iakttagelsen att det för den enskilde eleven fanns en hög korrelation mellan resultatet av de båda förkunskapstesten i algebra och numerisk räkning, men inte i så hög grad med det i geometri. Vi tolkade detta som att många av problemen med algebran egentligen beror på brister i de aritmetiska färdigheterna (rapport I). Observationerna av dem som ingick i gruppen med extra stödtid bekräftade denna tolkning.

Identifierade brister delades upp i tre kategorier:

- *Aritmetiska färdigheter.* Prioriteringsregler för räknesätten, parentesers betydelse och osynliga parenteser, bråktal och bråkräkning, negativa tal och minustecknets betydelse.

- *Matematisk abstraktionsnivå.* Uppfattning av bokstavssymboler, variabelbegreppet och samband mellan variabler, uppställning och tolkning av algebraiska uttryck.
- *Logiskt tänkande.* Logiska strukturer, övergripande algebraiska begrepp.

En stor del av detta kan hänföras till tidig algebra eller, med Balacheffs (2001) terminologi, symbolisk aritmetik. Det var också just i den strukturella behandlingen av uttryck förkunskaperna i algebra var svaga, medan eleverna i högre utsträckning klarade den operationella (Sfard, 1991).

Traditionellt förväntade man sig att de elever som började på naturvetenskapligt program (eller linje) hade vissa minimifärdigheter i algebra. Kursplanen för särskild kurs i matematik säkerställde att eleverna åtminstone vid något tillfälle mött vissa algebrabegrepp och prövats i en rad algebrafärdigheter, inkluderande de flesta uppgifter i förkunskapstestet. Elevkullen som började gymnasiet hösten 1998 var emellertid den första som studerade enligt Lpf 94, och som alltså inte hade varit uppdelad i alternativkurser. Varje skola fick lösa problemet med matematikundervisning av elever med mycket stora skillnader i förutsättningarna på det sätt man där fann bäst. Vår enkät om nivågruppering visade en provkarta av praktiska lösningar, från helt sammanhållna klasser till nivågruppering med upp till fyra nivåer. I de sammanhållna klasserna var differentieringen av undervisningen självklart svår att genomföra, och i vissa fall fungerade den, enligt våra elevers vittnesmål, inte särskilt väl (se rapport II och III). Den gemensamma undervisningen upplevdes som att den ofta bedrevs på en för individen felaktig nivå eller, vilket var det vanligaste, ersattes med ”enskild räkning”. Detta stämmer också väl överens med de iakttagelser som gjordes i den nationella granskningen av matematikundervisningen (Skolverket, 2003). Följden har blivit att begreppsutvecklingen i matematik, och då givetvis också i algebra, bromsats eller till och med avstannat för en del elever, tyvärr ibland dem sådana som i grunden haft både fallenhet och intresse för matematik.

För den nya elevgruppen, som började hösten 2000, hade utvecklingen gått längre i samma riktning. Förenkling av uttryck, kvadratiska uttryck och ekvationslösning hade försämrats ytterligare (rapport VI). Däremot visade bildande och tolkning av algebraiska uttryck istället på en viss förbättring. Detta tyder på en förändring av inriktningen av algebraundervisningen i grundskolan mot förståelse snarare än mekanisk färdighet, något som inte alls är negativt (se Drouhard & Teppo, 2004). Tyvärr åtföljs inte förståelsen av en tillräcklig färdighetsträning för att grundläggande manipulationer ska ske enkelt och felfritt. Högpresterande elever får inte den extra stimulans de behöver för att gå vidare, utan utlämnas i hög grad åt sig själva (rapport V). Intressant är också att den förskjutning av matematikfärdigheterna som vi kunnat se i övergången grundskola – gymnasium även kan spåras i övergången till högskolan. Brandell (2002) har i en bearbetning av det förkunskapstest, som getts till nybörjarna på civilingenjörsprogrammet vid KTH åren 1997 – 2002, redovisat lösningsfrekvenserna för de enskilda uppgifterna. Det är påfallande hur trenden för uppgifter av manipulativ karaktär är klart nedåtgående, medan ingen eller bara liten försämring kan upptäckas för uppgifter med tolkning eller förklaring av algebraiska mönster, regler och samband.

Vid inledningen av studien ställde vi frågan vilka förkunskaper en elev måste ha vid gymnasiestarten för att lyckas med algebran och matematiken. Vi fann att frågan i grunden var felställd (rapport V*). Det går inte att definiera någon specifik nivå för acceptabla förkunskaper.* Elever med mycket dåliga resultat på förkunskapstestet kunde ändå lyckas med matematiken, medan andra föll igenom trots goda sådana. Istället är det andra, mycket mer betydelsefulla, faktorer som bestämmer framgången.

Begreppsutveckling

Matematiken på ett naturvetenskapligt program läses uppdelad i flera etappkurser, som bygger på varandra liksom stegen i en trappa. För att en elev ska lyckas med matematiken, är det nödvändigt att han/hon hela tiden har fört sin begreppsutveckling så långt fram att ett aktivt deltagande i undervisningen är möjlig. Diskussionerna i klassrummet och de övningar eleven gör på egen hand måste ske i *den närmaste utvecklingszonen* (Vygotskij, 1978).

Förkunskapstestet visade de grunder eleverna hade att stå på och att bygga vidare på (rapport I). Det pekade också på var undervisningen skulle börja, såväl individuellt som för hela klasserna. En liten grupp elever hade stora brister i sitt begreppsbygge, men fick genom den speciella stödtiden möjligheten att reparera dem och att ”bygga ifatt” de övriga. I första hand måste de aritmetiska begreppen justeras, byggas på och stärkas.

Elevernas *symboliska språk* hade brister i flera komponenter (Drouhard & Teppo, 2004). Syntaktiska missförstånd visade sig t.ex. i att inte vara säker på prioritetsordningen för räkneoperationer eller vad parenteser står för. Grundläggande fakta, som vad de olika delarna i ett bråktal eller en potens står för, var förvånansvärt många osäkra på. Två välkända problem, minustecknets och likhetstecknets olika betydelser, fanns givetvis också med i bilden. Gallardo (2001, s. 128) beskriver fyra olika sätt att tolka negativa tal, som gymnasieelever måste kombinera för att det matematiska begreppet ”negativa tal” ska formeras. Semantiska missförstånd, som skillnaden mellan matematiska uttryck och påståenden (se kap.2) eller hur ett rationellt uttryck var uppbyggt, var en annan grupp. Här fanns naturligtvis även den viktiga utvecklingen av variabelbegreppet enligt Quinlans nivåer och Küchemanns kategorier. I stor utsträckning fanns bristerna inom det som kan betecknas som prealgebra eller tidig algebra, men de fanns även inom ren *taluppfattning*. Elever kunde t.ex. ha svårigheter med att se att 0,5 och 1/2 var exakt samma tal eller att $\sqrt{2}$ och 1,414 inte var det.

Eftersom jag själv undervisade i stödgrupperna, kunde jag observera hur utvecklingen gick framåt. Genom att gå tillbaka till den punkt där elevernas begreppsutveckling hade avstannat och sedan med hjälp av diskussioner och exempel stödja nya tankekedjor, kunde jag notera förvånansvärt snabba framsteg. Individuellt utformade övningar lyfte sedan fram räknefärdigheterna så att de kom i paritet med och, i vissa fall, överträffade dem hos elever som inte deltagit i stödtiden (se rapport II). Så snart en elev kunde visa att den extra stödtiden inte behövdes för honom eller henne slopades den, och eleven bedömdes kunna följa ordinarie undervisning utan problem.

Under hela studien använde vi oss av de måttstockar och taxonomier, som konstruerats av Quinlan (1992) och Küchemann (1981). Speciellt har många andra forskare och författare refererat till Küchemanns kategorier, vilka därför var av särskilt intresse för oss. En intressant studie gjordes av Brekke, Grønmo och Rosén (2000). Den var en del av KIM-projektet i Norge, och beskriver grundskoleelevers uppfattningar om användning av bokstäver i matematiken. Många av uppgifterna som gavs var direkt avsedda att pröva förståelsen inom de sex kategorierna.

För att anses ha en tillräckligt hög abstraktionsnivå för att kunna behärska algebra måste man enligt Quinlan uppnå den högsta nivån 5:

> *Man uppfattar bokstaven som representant för en klass av tal. Man behöver inte pröva med något av dessa tal.*

En del av våra elever visade när de började enbart förståelse på den näst lägsta nivån 2:

> *Det är tillräckligt att pröva med ett tal istället för bokstaven.*

I förkunskapstestet fanns en uppgift, som sedan upprepades i det första algebratestet (appendix D). Utgångspunkten var följande:

> *Låda A väger a kg, låda B väger 50 kg mer än låda A och låda C väger 3 gånger så mycket som låda A.*

Uppgifterna var att ange uttryck för vad låda B, låda C, låda A + låda B och slutligen vad alla tre lådorna tillsammans vägde. Bland de felaktiga svaren förekom sådana, där eleven helt enkelt hittat på ett tal för vikten av låda A, exempelvis 50 kg, och sedan beräknat samtliga svar utifrån det. Det fanns oftast inget som indikerade att det var ett exempel som gavs, utan man lämnade det som ett generellt svar. I de få fall när man angett svaret som ett exempel kan det istället föras in på Quinlans fjärde nivå, i vilken bokstaven faktiskt uppfattas som representant för en klass av tal, men det räcker med att pröva med ett av dessa tal.

Eftersom uppgiften upprepades, kunde vi påvisa en kraftig förbättring under det första året, och vid början av årskurs 2 hade det stora flertalet (> 90 %) uppnått nivå 5 (se rapport II). Det var dock förvånansvärt många som dröjde kvar i nivå 4 eller ofta återvände till nivå 4 eller till och med nivå 3 under hela resterande gymnasietiden. *Detta tyder på att dessa inte helt tillägnat sig den strukturella uppfattningen av uttryck utan håller kvar en operationell uppfattning* (Sfard, 1991).

I de olika testen visade eleverna en provkarta på Küchemanns kategorier *a – d* av elevuppfattningar om bokstäver. Speciellt kategori *a*, i vilken *bokstaven har ett bestämt värde från början*, är den uppfattning man använder sig av i ekvationer. Detta sätt att se bokstaven som något hemligt tal man ska avslöja är nog också ganska dominerande i grundskolans algebraundervisning, alltifrån de prealgebraiska övningarna av typen $17 = \_\_ + 9$ till de enkla ekvationerna. Ofta används vid ekvationslösning informella metoder som t.ex. att *tänka baklänges* (”backtracking”) eller *övertäckning*. Det är i sig bra att eleverna får träna olika sätt att angripa och förstå ekvationer, men dessa metoder leder enligt min mening inte utvecklingen av variabelbegreppet framåt eftersom de enbart bygger på aritmetiskt tänkande. I kategori *a* faller också ren värdeberäkning av formler, som inte innebär något strukturellt algebraiskt tänkande alls, utan handlar om att matcha bokstäver mot tal givna i en kontext.

Kategori *d*, *bokstav som specifikt okänt tal*, innefattar även strukturell ekvationslösning, där eleven *kan* använda formella algebraiska räkneoperationer. Från början fanns det stora brister i tillämpningen av dessa operationer, och flera elever kunde inte alls placeras in i denna kategori. Testerna visade emellertid ett klart framåtskridande i kunnandet samtidigt som svårighetsgraden höjdes: linjära ekvationer utan parenteser, linjära ekvationer med parenteser, kvadratiska, rationella, logaritmiska och trigonometriska ekvationer. I rapport V beskrev vi resultaten av sluttestet:

- *Lösning av vanliga ekvationer fungerar tillfredsställande. De flesta fel som förekommer är slarvfel.*
- *De flesta elever förstår vad en lösning till en ekvation är och kan genom prövning avgöra om ett visst tal är en lösning eller ej.*

Med ”vanliga ekvationer” menade vi linjära ekvationer och enklare sådana av de övriga kategorierna. Det fanns betydande problem med vissa andra typer, t.ex. rationella ekvationer och andragradsekvationer där minst en av rötterna inte var heltal. När samma uppgifter gavs till den senare elevgruppen vt 2003 konstaterades det dock att flera av dessa problem kraftigt minskat när mer tid gavs för begreppsutvecklingen.

I sluttestet hade vi två uppgifter som var avsedda att undersöka kategorierna e och f. De var också direkt hämtade från Küchemanns arbete (1981). För *bokstav som generellt tal* gavs uppgiften:

Vad kan man säga om c, om c + d=10 och c < d ?

Cirka 2/3 av eleverna klarade att ge ett acceptabelt svar i båda elevgrupperna. Bland de övriga svaren var det många som prövade med specifika tal, ofta heltal, och gav ofullständiga exempel istället för generella svar. Det visar att många var kvar i kategori *a* eller på lägre nivåer enligt Quinlan.

Kategori *f* innehåller även alla typer av *algebraiska förenklingar*, vilka ingick i samtliga tester. Även för dessa visade eleverna ett klart framåtskridande, och med likartade problem som ekvationer innebar. En iakttagelse var också att eleverna i de första testerna blandade samman ekvationer och förenklingar, så att vid lösningen den ena kunde övergå i den andra. Detta stämmer väl med vad Ekenstam och Greger (1987) fann i sin undersökning i årskurs 9 och med vad andra, exempelvis Kieran (1992), relaterar. En orsak kan vara att eleverna inte är klara över enligt vilken kategori de för tillfället arbetar med variabeln. I rapport V drar vi emellertid slutsatserna:

- *Merparten av våra elever behärskar grundläggande förenklingsalgebra även om säkerheten vid manuell räkning kunde ha varit bättre.*
- *Fel på enklare förenklingsalgebra beror i de flesta fall på dålig förståelse av negativa tal – minustecknets olika roller.*

Den viktiga frågan om förhållandet mellan *algebraisk förståelse* och *färdighet i algebraiska manipulationer* måste också kommenteras. Det har funnits de som hävdat att det ena måste föregå det andra; antingen måste man förstå innan man kan utföra något eller så måste man ha övat innan det finns något man kan förstå. Vår bestämda uppfattning, baserad på de observationer som gjordes i studien och för övrigt vår hela lärarerfarenhet, är att det inte går att fastställa en sådan ”enkelriktad” väg. Att påstå att antingen förståelse eller färdighet är mest betydelsefullt är som att diskutera vilken sida på en stege som är viktigast för att den inte ska gå i bitar när man klättrar uppför den. Man skaffar sig istället kunnande inom algebra genom ett komplicerat samspel mellan förståelse och färdighet, och båda krävs för att ett algebraiskt tänkande ska kunna uppnås (Drouhard & Teppo, 2004).

För Küchemanns kategori *f*, *bokstav som en variabel*, gavs i sluttestet uppgiften:

Vilket är störst, 2n eller n + 2? Förklara!

Eleverna hade svårigheter att reda ut förhållandet mellan uttrycken på ett acceptabelt sätt. I den tidigare gruppen var det bara ca 40 % som hade ett godkänt svar mot ca 55 % i den senare gruppen. Många av svaren var ofullständiga, men innehöll delsvar som visade att en majoritet av eleverna trots allt klarade kategori *f*. Grevholm (2003) beskrev hur i stort sett samma fråga gavs till lärarstudenter för grundskolans senare år i samband med en algebrakurs. En fjärdedel av studenterna kunde inte ge en korrekt förklaring, utan försökte med gissningar och trial-and-error.

En viktig iakttagelse i vår studie var att *utvecklingen av elevernas algebrakunnande ofta skedde språngvis*. Ur rapport V:

> *Vi har sett exempel på att en liten detalj t.ex. en missuppfattning av hur man hanterar negativa tal, kan försvåra algebraiska förenklingar. Eleven gör hela tiden fel. När missuppfattningen klarats upp fungerar förenklingarna bra. Detta påverkar både elevens självförtroende och motivation positivt. Inlärningen sker språngvis och när ett hinder har övervunnits, gör eleven väsentliga framsteg.*

Om eleven har en allvarlig missuppfattning, kan ett fortsatt övande av färdigheten vara meningslös eller till och med skadlig. Man befäster då snarare de felaktiga föreställningarna. Istället är det viktigt att man noga analyserar problemet för att ha möjlighet att hjälpa eleven att lösa upp det. Ett tydligt sådant exempel beskrevs i rapport III (”elev B”). Eleven, som var duktig i matematik, hade problem med en missuppfattning av räkning med negativa tal, som medförde upprepade fel i förenklingar och ekvationer. Det tog både tid och ansträngning att komma till botten med problemet, och eleven var ganska frustrerad och gjorde närmast motstånd mot försöken att reda ut det. I denna situation är det viktigt att läraren inte släpper eleven förrän båda förstått vad felet beror på. När eleven till slut fick klart för sig hur hon misstagit sig, gjorde hon sedan det mesta rätt i algebran.

Vikten av att observera sprången i lärandeprocessen har framhållits av flera forskare. Redan Freudenthal (1978) skrev:

> *If learning process is to be observed, the moments that count are its discontinuities, the jumps in the learning process.* (s. 78)

Även Vygotskij (1999) diskuterar denna ojämnhet i inlärningskurvan. Även om det i citatet nedan gäller aritmetik, menar han detta generellt för matematik, alltså även algebra:

> *Det kan tyckas som om den första, andra, tredje och fjärde länken i den aritmetiska undervisningens förlopp varit oväsentliga för utvecklingen av det aritmetiska tänkandet, och som om först en viss femte länk visade sig vara avgörande för utvecklingen. Utvecklingskurvan tog här en skarp vändning uppåt och kanske också rusade på i samma fart förbi påföljande länkar i utvecklingsprocessen – länkar som man därför kunde tillägna sig på ett helt annat sätt än de föregående.* (s. 325)

Ett av grundproblemen i matematikundervisningen är att ”sprången” varken kommer samtidigt eller på samma ”ställe” i begreppsutvecklingen för alla elever i en klass eller grupp. Men svaret på detta bör *inte* vara en helt individuell undervisning, enligt vår åsikt. Detta, och arbetssätten i undervisningen generellt, diskuteras vidare i kap.6.

Många av de uppgifter vi gav i tester och enkäter följde Drouhard och Teppos punkter med *kännetecken för algebraisk förståelse* (se kap.2). *”Att kunna tolka symbolisk skrift flexibelt”* testades t.ex. i de två uppgifterna ovan som var hämtade från Küchemann. *”Att kunna använda algebra på nya sätt”* prövades i vissa ekvationer som eleverna inte sett förut. I sluttestet gavs ekvationen $x^x + 3 = 7$, som var helt ny för alla. Ändå klarades den av så många som 75 %, vilket får anses tillfredsställande. *”Att kunna förklara procedurerna som används”* studerades på flera sätt, dels genom att eleverna fick skriva fullständiga lösningar på en del uppgifter och dels genom de enkätfrågor med uppföljande intervjuer som gjordes.

Den första förklarande enkätuppgiften vi gav var följande:

> *Förklara i ord hur man löser ekvationen $4x + 35 = 95 - x$. Tänk dig att du skall hjälpa en kamrat som inte kan lösa ekvationer.*

Metoderna som eleverna använde klassificerades (”göra lika på båda sidor”, knappt 50 %, ”flytta över och ändra tecken”, 25 %, lösning med prövning och inspektionsmetod, 7 %). Men nästan 20 % gav inget eller helt obegripligt svar och klarar alltså inte denna del av algebraisk förståelse. I nästa enkät hade vi istället ett ekvationssystem. Mönstret med att knappt 20 % visar lösningar med brister och dålig eller ingen förklaring håller dessvärre i sig.

Uppgiften är visserligen svårare, men andelen elever som inte kan ge en godtagbar förklaring är förvånansvärt stabil.

En annan förklaringsuppgift, som dels kan sägas tillhöra Drouhard och Teppos sista punkt - *förstå strukturer i användningen* - och dels testa *funktionsperspektivet*, var:

> *Vi skriver $y = x + 5$. Vad menar man med det? Hur hänger t.ex. x och y ihop?*
> *Förklara gärna på mer än ett sätt.* (se rapport I)

Uppgiften relaterades ursprungligen av Blomhøj (1997), vars studenter undersökt elevers förståelse av funktionsbegreppet i en niondeklass i Roskilde. Hans klassificering av svaren visar på de svårigheter elever har att i ord tolka algebraiska uttryck och samband. I ca 1/3 av svaren angavs att x var större än y, och majoriteten av eleverna tolkade uttrycket fel.

I vår egen enkät var det ingen som angav att x var större än y. Ca 3/4 av svaren angav storleksförhållandet helt korrekt mellan de två variablerna, men en liten minoritet, 10 %, lämnade inget eller obegripligt svar. Kvaliteten på de korrekta svaren var skiftande, och väldigt få elever kopplade $y = x + 5$ till koordinatsystem, grafer och värdetabeller. Orsaken skulle kunna vara bristande förkunskaper, men de flesta eleverna hade arbetat med detta på grundskolan och borde ha kunnat säga något om det.

Grevholm (1998; Hansson & Grevholm, 2003) har undersökt lärarstuderandes förståelse av sambandet $y = x + 5$, före respektive efter en kurs i funktionslära. Vår egen användning av uppgiften berodde från början på att vi var intresserade av eventuella skillnader mellan hur lärarstudenterna och våra elever kunde förklara sambandet. Svaren som Grevholm fick i den första undersökningen var till största delen samma som våra elever gav, vilket skulle tyda på att begreppsförståelsen i detta sammanhang är relativt konstant och inte förändras särskilt mycket under gymnasietiden. Dock måste man komma ihåg att de undersökta grupperna inte är direkt jämförbara, och det är heller inte fallet med en niondeklass gentemot en naturvetarklass. Den andra undersökningen gav i princip samma resultat som den första, och en av de viktiga slutsatserna är att begreppsutvecklingen går väldigt sakta. De flesta gav samma svar efter som före kursen.

Enkät 2 i vår undersökning innehöll en förklaring av ett något svårare samband, nämligen $y = 2x + 5$. Nästan hälften av eleverna gav mer eller mindre bristfälliga svar eller inget svar alls, vilket alltså skulle tyda på att ingen förbättring skett. Skillnaden var emellertid att eleverna nu flitigt använder ord som linje, funktion, proportionalitet, värde, diagram m.m., även i felaktiga svar. En viktig observation är också hur svårt många faktiskt har att uttrycka matematiska tankar i en berättande text, något som är en av de språkliga huvudfaktorerna för lärande.

Stabiliteten i elevernas kunnande var en av de centrala punkterna i vår undersökning. Bland drivkrafterna bakom studien fanns klagomålen från högskolan om elevernas bristande algebrafärdigheter (se kap.1), och därför ville vi undersöka vilka sådana de faktiskt hade med sig dit. Dessvärre är det i lärandeprocessen inte bara så att begrepp införlivas och differentieras, utan också att de raderas (Novak, 1998). I begreppsbygget rivs plötsligt vissa delar. Kanske hela sektioner stängs av. Populärt brukar man använda beteckningen ”glömskekurvan” för processen. Det kunnande som försvinner är oftast det som sist tillkommit och sitter ”lösast”. Efter ett tag planar kurvan i princip ut, och det som då finns kvar är det som är stabilt i begreppsbygget. Genom att låta likadana eller liknande uppgifter återkomma i sluttestet som i tidigare test kunde stabiliteten mätas.

För den första gruppen konstaterades i rapport V att *de algebrakunskaper som var stabila, var de som eleverna hade med sig från sitt första gymnasieår*: grundläggande förenklingsalgebra med hantering av binom och polynom samt tillhörande ekvationer. Vidare var *förmågan att ställa upp och tolka algebraiska uttryck* acceptabel, men kunde ha varit bättre. Däremot hade eleverna *inga stabila kunskaper i hanteringen av rationella uttryck*.

De stabila kunskaperna var för den senare gruppen förvånansvärt lika den första när det gäller det eleverna hade med sig från första året (se rapport VII). Dock visade de *en klar förbättring av de transformerande färdigheterna*: formulering och tolkning av algebraiska uttryck, förmåga att se mönster etc. *Algebrafärdigheterna* som eleverna tillägnat sig under det andra gymnasieåret hade också förbättrats på flera punkter, exempelvis hantering av rationella uttryck och ekvationer eller logaritmiska och trigonometriska ekvationer. Mycket av förändringarna kan tillskrivas den utökade tiden för lärande, men även en förskjutning av fokus i hela algebraundervisningen från grundskola till gymnasium.

Undervisning

En av grundförutsättningarna för en god begreppsutveckling är den undervisning eleverna upplever. För att undervisningen ska bli effektiv krävs att flera faktorer samverkar på ett gynnsamt sätt: *de yttre ramarna*, *de tillämpade arbetssätten*, *perspektiven och kontexterna*, *eleverna själva* och inte minst *läraren som yrkesperson*.

Det är en självklarhet att någon undervisning inte kan äga rum om det inte sker ett pedagogiskt möte mellan elever och lärare. ”Mötet” kan vara via datorer eller andra kommunikationsmedel som i distansundervisning eller interaktiv undervisning, men det vanligaste är den personliga undervisning som sker i klassrummet. Detta var också förutsättningen i vår studie.

Målen för undervisningen fastställs i kursplanerna, som för gymnasiets del är Matematik A-E samt, efter läroplansrevideringen 2000, även Matematik Diskret och Matematik Breddning (Skolverket 1994, 2000). Den tilldelade tiden för genomförandet anges i timplaner, som efter 2000 fastställs lokalt på varje gymnasieskola. Tiden måste dels vara tillräckligt tilltagen för att motsvara innehållet i kurserna, och dels vara fördelad på ett ändamålsaktigt vis. Detta utreds närmare i nästa avsnitt.

Arbetsmiljön i klassrummen och på skolan i stort måste också vara sådan att den inte lägger onödiga hinder för undervisningens genomförande. Visserligen kan en god psykosocial miljö uppväga många brister i den yttre arbetsmiljön, men det går inte att få till stånd en effektiv undervisning under vilka förhållanden som helst.

Under hela studien, inkluderande båda elevgrupperna, ansåg vi att *de yttre ramarna var tillfredsställande eller i alla fall acceptabla utom på en punkt, nämligen tidsramen*. I övrigt upplevde vi i Klippans Gymnasieskola en i stort sett positiv lärandemiljö. Det fanns en lugn och vänlig stämning på skolan som också avspeglade sig i klassrumsarbetet. Klassrummen var ur vissa aspekter något bristfälliga, men ändå klart acceptabla för en effektiv undervisning.

De arbetssätt som tillämpades under studiens gång utreds närmare i rapport V under rubriken *”Diskussion av undervisningen i algebra”*. Eftersom det totalt var fem undervisande lärare inblandade, kan vi inte fullt ut svara för vilka arbetssätt samtliga elever mötte, utan endast de vi själva undervisade. Vid samtal med de övriga lärarna framkom emellertid inte något som tyder på att våra arbetssätt varit särskilt olika. Sättet undervisningen bedrivs på avspeglar den pedagogiska grundsyn man har, vilken i sin tur är avhängig av synen på kunskap och lärande. Som nämnts i kapitel 2, ansluter vi oss närmast till en socialkonstruktivistisk uppfattning om lärande. Det har naturligtvis betydande inverkan på vårt sätt att planera och genomföra undervisningen.

Björkqvist har i en artikel, *”Social konstruktivism som grund för matematikundervisning”* (Björkqvist, 1993), beskrivit konsekvenserna för matematikundervisning med en sådan grundsyn. Han skriver där bl.a.:

> *Matematik är en social konstruktion. Varje individ bidrar till dess uppbyggnad i det specifika sammanhang där han verkar.* (s. 13)

> *Den naturliga motivation som består i att man strävar efter allt större personlig förståelse borde inte hämmas genom att man ifrågasätter elevens möjlighet att själv vara den aktiva parten i en inlärningssituation.* (s. 14)

Vi försökte i vårt eget klassrumsarbete att följa dessa intentioner. En aktiv diskurs kring matematiska begrepp och metoder uppmuntrades på olika sätt. Eleverna fick arbeta med problemlösning i par eller i grupp och sedan diskutera resultaten med läraren och/eller hela klassen. Även i det enskilda arbetet var det viktigt att vi som lärare sökte samtal med eleverna, även på ett metakognitivt plan.

> *En ökande förmåga att reflektera över det egna tänkandet kan befrämjas genom att man gör eleven uppmärksam på hur han tänker och på att andra personer kan tänka på ett annat sätt.* (Björkqvist, 1993, s. 15)

Det går att basera hela undervisningen på vad som kallas *”cooperative learning”* (se t.ex. Artzt & Newman, 1990), men vi menar att man enbart bör tillämpa delar av detta i undervisningen. Skälet till detta är vikten för eleverna av att få uppleva en variation i arbetssätten (se kap.6). Förutom samarbetssätten ovan ville vi också att eleverna i det dagliga arbetet skulle känna full frihet att samarbeta kring matematikuppgifterna. Tyst, individuellt arbete ”i egen takt” anser vi inte vara förenligt med en socialkonstruktivistisk grundsyn och heller inte gynnsamt för elevernas begreppsutveckling. Detta har bekräftats i flera undersökningar (se t.ex. Skolverket, 2003, s. 17; Skolverket, 2004, s. 45-46).

En metod för differentiering av undervisningen, som förekommer på ganska många gymnasieskolor, är *nivågruppering*. Lärarna får därigenom möjlighet att arbeta med grupper, som har relativt homogena kunskaper och färdigheter, vilket öppnar vissa positiva möjligheter att anpassa undervisningen bättre till elevernas utvecklingsnivå. Det finns dock allvarliga invändningar mot den här metoden (se t.ex. Wallby, Carlsson & Nyström, 2001, s. 113-115), och vi ansåg de negativa effekterna vara så stora att de mer än förtog de positiva. Istället infördes metoden med *extra stödtid* för vissa elever, som relaterats ovan. Metoden stämmer väl både med vår konstruktivistiska grundsyn och med vår positiva syn på den enskilde elevens möjligheter att utveckla sitt kunnande om de rätta förutsättningarna ges.

Den *kontext* undervisningen sker i är av stor betydelse för de långsiktiga resultaten:

> *Det är viktigt för en elev att ha konkreta upplevelser av situationer som kan matematiseras. Begreppsbildning bygger på strukturella likheter i erfarenheter.*
>
> …
>
> *Variation i de kontexter som utnyttjas i undervisningen befrämjar livskraft i föreställningar som uppstår.* (Björkqvist, s. 14)

I kapitel 2 angavs fyra *perspektiv* på algebra (Bednarz, Kieran & Lee,1996), som också visar på olika kontexter. Vi arbetade medvetet med att närma oss algebraiska begrepp utifrån dessa skilda perspektiv, och flera testuppgifter var avsedda att pröva elevernas kunnande inom dem. *Generaliseringsperspektivet* testades t.ex. i stjärnmönsteruppgifterna i förkunskapstestet, algebratest 1 och sluttestet (något svårare). Dessa finns relaterade i rapporterna I, II, V och VII. Lösningsfrekvenserna visar en tydlig förbättringstendens för förmågan att bilda en generell formel, och detta gäller även den senare undervisningsgruppen jämfört med den förra. Detta är också en typ av uppgift som tränas i allt högre utsträckning inom alla skolnivåer.

Funktionsperspektivet har delvis utretts ovan med förklaringarna av t.ex. $y = x + 5$, men det kommer också in tillsammans med *modelleringsperspektivet*. I förkunskapstestet och algebratest 1 fanns diagram, som skulle översättas till linjära funktioner. Eleverna hade från början klara problem med linjära samband, men dessa minskade kraftigt efter Matematik B då funktionslära studerats grundligt. Vidare fanns i sluttestet uppgifter som var avsedda att pröva uppställning och tolkning av algebraiska uttryck. Ett exempel på uppställning var ”student-professor-problemet”:

> *På en skola finns det 9 gånger så många elever som lärare. Ställ upp en formel mellan antalet elever E och antalet lärare L.*

Tolkning skulle göras i:

> *Äpplen kostar a kr/st och päron b kr/st. Förklara vad uttrycket 3a + 5b betyder.*

Resultaten var inte helt tillfredsställande. Bara 60 % kunde ange en korrekt formel och 75 % en godtagbar förklaring i den första gruppen. Den senare gruppen klarade uppgifterna något bättre med 75 % resp. 85 %. Jag tolkade det som en förskjutning av fokus inom algebraundervisningen mot mer träning av transformerande färdigheter (se ovan). Över huvud taget har de olika delmomenten i *problemlösningsperspektivet* kommit att tränas alltmer.

Vid problemlösning är det nödvändigt att behärska ett antal färdigheter, bl.a. översättningar mellan olika *representationer* som *situationer och text*, *tabeller*, *grafer* samt *formler och symboler* (se t.ex. Persson, 2002). I diagramtolkningsuppgifterna var det också just övergången mellan graf och formel som prövades.

I övrigt arbetade vi målmedvetet med problemlösning i matematiken. Under samtliga matematikkurser avsatte jag exempelvis regelbundet tid (oftast en lektion per vecka) enbart till problemlösning i grupp. Problemen konstruerades speciellt för detta arbetssätt, och var vart och ett avsett att bearbetas under en hel lektion med gruppdiskussioner, demonstration av olika lösningssätt och gemensam diskussion. Eleverna var mycket positiva till detta arbetssätt, men det var också en allmän åsikt att tidsutrymmet inte medgav att vi alltid arbetade så. Dessutom var variationen i arbetssätt, att varje lektion inte var helt förutsägbar, en positiv faktor i sig som med största sannolikhet hade en positiv inverkan på elevernas lärande.

En genomtänkt användning av *grafräknare* i matematikundervisningen öppnade för nya möjligheter i arbetet utifrån de fyra perspektiven. Flexibiliteten som fanns i att snabbt kunna byta mellan representationer som uttryck, tabell eller graf hjälpte eleverna att få en rikare begreppsuppfattning. Grafräknarna medgav också att vi som lärare kunde närma oss begreppen på nya sätt. Ett exempel är andragradsuttryck och –ekvationer, där grafen kan undersökas med räknarens inbyggda verktyg och skapa en helt annan förståelse för begrepp som nollställe, symmetri eller extremvärde. En elev uttryckte det så här:

> *Jag förstod matten bättre när jag fick använda grafräknaren.* (rapport VII)

Det finns givetvis en fara med att alltför mycket förlita sig på räknarna (se citatet av Drouhard och Teppo i kap.2). De manuella färdigheterna måste också tränas i tillräckligt hög grad för att inte förståelsen ska bli lidande.

I rapport VI beskrevs hur viktigt det var att *elever och lärare* möts i den närmaste zonen för lärande:

> *Lärarens sätt att möta eleverna i klassrummet är på många sätt avgörande. Eleven måste få börja med det hon/han verkligen kan och inte det hon/han enligt någon måttstock förväntas kunna. Både elev och lärare måste också tro att framsteg och lyckade resultat är möjliga.*

Med en socialkonstruktivistisk syn på lärande kan man inte säga att antingen ”lär läraren ut” eller ”lär eleverna in”, utan lärandeprocessen sker i samspel (se kap. 2). Björkqvist skriver:

Växelverkan med andra elever i matematiska sammanhang hjälper eleven att testa sin kunskap i avseende på livskraft.

…

Läraren är med sin yrkesskicklighet den som har samhällets förtroende att förmedla kulturellt kapital. Det bör inte ses som indoktrinering. Läraren är inte en absolut, men väl en provisorisk auktoritet. (Björkqvist, 1993, s. 15)

Att läraren har en viktig, för att inte säga avgörande, betydelse för undervisningen har blivit klargjort i en rad viktiga utredningar (se t.ex. Skolverket, 2003, s. 25; Utbildningsdepartementet, 2004, s. 91-94). Ändå är det fundamentalt att läraren inte skjuter sig själv i förgrunden, vilket var vanligt i tidigare undervisning. Istället måste en konstruktiv och effektiv balans hittas, där elevernas aktiviteter och lärarens kunnande samspelar.

Tomas och jag försökte arbeta enligt dessa principer, och jag menar att vi lyckades med det i stor utsträckning. I den sista enkäten i årskurs 3 kunde eleverna uttrycka sina åsikter om matematikundervisningen i gymnasiet (se rapport V och VII), och majoriteten var nöjda med det de upplevt och ansåg att de fått goda kunskaper att bära med sig i fortsättningen.

Tid för lärande

En av de viktigaste faktorerna för lärande är tiden. I *”Lusten att lära – med fokus på matematik”* (Skolverket, 2003) skriver man:

Tid är en resurs som rätt utnyttjad och tillsammans med andra resurser – lärarkompetens i vid bemärkelse, organisering av undervisningen utifrån elevers behov och nationella mål – kan skapa en god miljö för lärande. Meningsfull tid är ”den tid då man möter eleverna och känner att man har tänt en gnista till fortsatt lärande och utveckling”. (s. 24)

Inom matematikundervisningen är det nödvändigt för eleverna att få tillräckligt med tid för både begreppsutveckling och övning av färdigheter. I synnerhet gäller det utvecklingen av algebrafärdigheter, med den höjning av abstraktionsnivån dessa kräver. Vi noterade i studien att tröskeleffekter, då begreppsutvecklingen tog plötsliga ”språng”, var vanliga (se ovan). Sprången kom ofta efter en mer eller mindre lång tids övning, under vilken denna del av begreppsutvecklingen stått stilla. Med alltför knapp tid hinner då aldrig eleven fram till punkten då utvecklingen går framåt igen, utan blir kvar på den gamla nivån.

Den komplicerade samverkan mellan förståelse och färdighet, som diskuterats ovan, kräver också att det finns tillräckligt med tid att öva och befästa de nyvunna begreppen. Det är ju meningslöst att med stor möda ta sig över en tröskel, bara för att sedan genast ramla tillbaka igen. För att en kunskap eller färdighet ska bli stabil, måste den befästas på flera sätt, både i begreppsmässiga kopplingar och med övning (se t.ex. rapport V, VI).

Det är viktigt att definiera vad vi menar med *"tid för lärande"*. Man får genom timplanen ett antal timmar till sitt förfogande för att genomföra undervisningen, men den utgör inte i sig den egentliga tiden för lärande, utan är bara en nödvändig bakgrundsfaktor. Det handlar istället om den *effektiva tiden* för lärande, då eleverna försätts i didaktiska situationer som för deras kunnande framåt. Man kan tänka sig klassrumsmiljöer, där eleverna bara vistas utan att någon egentlig utveckling sker. Kanske alla rentav sitter tyst och snällt och räknar, men utan att någonsin träffa på några nya begrepp eller bli utmanade i sitt matematiska tänkande. Då kan man nog inte tala om "tid för lärande". Det är lärarens huvuduppgift att organisera och genomföra undervisningen på ett sådant sätt att elevernas kunskapsutveckling befrämjas.

"Tid för lärande" existerar även utanför klassrummet. En formell sådan tid är läxtiden, under vilken eleven får möjlighet att befästa sina kunskaper i enskilda övningar. I Sverige ägnas förhållandevis lite tid åt läxor jämfört med de flesta andra länder (jämför t.ex. PISA-undersökningen 2001), och tendensen går nog snarast mot att den tiden minskar ytterligare. Orsaken ligger nog i de yttre faktorer, som stärker eller försvagar tiden för lärande (se kap.2), som exempelvis samhällets, föräldrars och kamraters åsikter. Att gå i skolan ses mer och mer som att man går till ett arbete. Tiden utanför ska då vara fritid och inte "störas" av att arbete tas med hem. Men lärande handlar ju om en personlig utveckling. Skolarbetet är inte för någon annans bästa än för eleven själv. Man arbetar egentligen bara för sig själv, och om man inte väljer att satsa på sitt eget matematikkunnande stängs många framtidsmöjligheter. Problematiken tas upp i "Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens" i ett av huvudförslagen (Utbildningsdepartementet, 2004, s. 101-112).

För Tomas och mig var det av största vikt att uppnå hög effektivitet i undervisningen, samtidigt som vi försökte undvika stress. Långsiktig planering av både undervisningsmål och läxor var nödvändig för att ge eleverna möjlighet att själva planera sina arbetsinsatser. Att eleverna själva ska kunna ta ansvar för sitt lärande är en av våra pedagogiska grundprinciper (se ovan), och då måste de få möjlighet att göra det. I kursutvärderingarna var eleverna mycket positiva till det sätt arbetet planerats och tyckte att de fått möjlighet att påverka genomförandet. Ändå var det många som klagade på den dåligt tilltagna tiden i kurserna Matematik C och D, som lästes i årskurs 2 (se rapport V). De ansåg att undervisningen gick alldeles för fort, och att det medförde stress och dåliga kunskaper. Våra undersökningar av stabiliteten av algebrakunskaperna bekräftade detta. Det som lärts i årskurs 2 hade dålig stabilitet och var i många fall bortglömt i sluttestet (rapport V). Vi höll med om att tidsbristen var besvärande:

> *Elevernas inlärningssituation i NV2 har inte varit bra. Kursplanerna från 1994 innebär att eleverna på alltför kort tid möter en stor mängd nya begrepp inom bl.a. differential- och integralkalkyl och trigonometri. För de flesta elever är det en omöjlighet att smälta allt detta. Även om man, som vi gjort, prioriterar hårt, är situationen i stort sett orimlig.* (rapport IV)

Det måste givetvis finnas en grundläggande korrespondens mellan innehållet i en kurs och den tid för lärande man har till sitt förfogande för att genomföra den. Detta var dessvärre inte fallet med C- och D-kurserna, som hade alldeles för lite tid tilldelad i timplanerna i förhållande till det omfattande och kognitivt svåra innehållet.

Med revideringen av Lpf 94, som gjordes 2000, tilldelades matematiken mer tid som i Klippans Gymnasieskola kom just dessa kurser tillgodo. Detta gav mig impulsen att tillföra studien en extra del, som speciellt skulle undersöka effekten av denna tidsutvidgning (se rapporterna VI-VII). Metoden var att genomföra vissa tester och enkäter med de första eleverna, som studerade enligt den nya timplanen, för att utröna på vilka sätt deras kunskaper, färdigheter och attityder kom att skilja sig från den föregående gruppens.

Resultaten pekade på förbättringar inom vissa avsnitt av algebran, speciellt dem som eleverna arbetat med i årskurs 2, men också på områden som inte blivit bättre:

- *Manipulativa färdigheter har förbättrats inom avsnitt till vilka den utökade tiden har använts, exempelvis rationella uttryck och ekvationer eller exponentiella, logaritmiska och trigonometriska ekvationer.*
- *Inom områden som inte fått mer tid, exempelvis andragradsekvationer och förenkling av uttryck, kan ingen förbättring av de manipulativa färdigheterna upptäckas. Det finns ingen ”överspillnings”-effekt från avsnitten ovan.*
- *Översättning av situationer och problem till algebra samt tolkning av algebraiska uttryck är generellt bättre. Orsaken kan vara att vi lägger*

större vikt vid dessa färdigheter i skolmatematiken, både på grund- och gymnasieskolan, men också att den utökade tiden används för det här ändamålet. (rapport VI)

Här ses alltså tydligt hur extra tid får genomslag i precis det den används till och inte på något allmänt sätt. Att bara anslå mer tid ospecificerat, löser t.ex. inte problem med dåliga resultat i matematikundervisningen, om man inte tar effektivitetsfaktorn med i beräkningen.

Ansåg då eleverna att de nuvarande timplanerna var tillräckliga? Några tyckte faktiskt det, men det vanligaste var motsatsen:

- *Eleverna anser inte att de nya och utökade timplanerna är fullt tillräckliga för innehållet i kurserna. Antingen måste timtalet utökas ytterligare, eller bör vissa avsnitt i kurserna strykas.* (rapport VI)

Många uttryckte även att kursen Matematik B, som i stor utsträckning är en algebrakurs, borde ges mer tid. Men kanske denna tid inte behövs för alla elever, utan istället kan erbjudas till de elever som särskilt behöver den, såsom egentligen skollagen påbjuder.

Det finns olika sätt att organisera sådan extra tid. En del skolor nivågrupperar eleverna och anslår mer lektionstid till dem som behöver det, medan andra elever får mindre tid. Vi införde istället modellen med stödtiden.

Stödtiden gavs i form av en extra timme i veckan under hela årskurs 1. Eleverna togs ut till denna extraundervisning av sina respektive lärare och deltagandet var obligatoriskt. Elevantalet i varje grupp fick inte överstiga 10. Med utgångspunkt i resultaten av förkunskapstesten gavs individuell träning inom avsnitt eleverna visade sig inte behärska. Speciell tonvikt lades i början på taluppfattning och aritmetik, men övergick sedan i algebraisk begreppsutveckling. Vissa avsnitt, som t.ex. bråkräkning, hade samtliga elever problem med, och inom dessa kunde en mer sammanhållen undervisning genomföras i gruppen.

Grupperna var inte statiska. När en elev uppnått sådana färdigheter att han/hon bedömdes ha lika goda förutsättningar att följa den ordinarie undervisningen som resten av klassen, avbröts extratiden. På så sätt kunde resurserna koncentreras för de återstående eleverna och förstärka deras möjligheter att ”komma ifatt”. Under det första året misslyckades detta inte i något fall, och följden blev att samtliga elever klarade minst godkänt betyg i kurserna Matematik A och B. En annan viktig effekt blev att avhoppen från det naturvetenskapliga programmet var få. *Modellen med stödtid* *var framgångsrik* och är nu ett ordinarie inslag i matematikundervisningen på Klippans Gymnasieskola.

Den extra timmen var betydelsefull även på ett annat sätt, nämligen som ett extra övningstillfälle. De finns de som hävdar att det är förkastligt att dela upp matematiktiden i många lektioner i veckan, och att man istället borde koncentrera den till något eller ett par längre pass. Frågan är om det är en riktig väg? Walberg (1988) skriver:

> *One of the most dependable and ubiquitous findings from experimental psychology holds up in classroom research. "Spaced" practice over several lessons or study periods interspersed with other activities is superior to equal amounts of time spent in "massed" (concentrated, possibly one-session) practice.* (s. 79)

Samtidigt måste det vara fel att fragmentisera matematikundervisningen alltför mycket. Då blir det också svårt att få tid för begreppsutvecklingen och för de små och stora "sprången". En väl avvägd balans måste vara det optimala.

Eleverna i klasserna som ingick i vår studie hade ett matematikpass tre dagar i veckan under årskurs 1, bortsett från dem som hade stödtid som fick fyra pass. Den första elevgruppen fortsatte sedan under årskurs 2 med samma antal pass per vecka, medan det i årskurs 3 minskade till två pass. Förändringen av timplanerna 2000 medförde att den senare gruppen istället fick ett matematikpass på 60 min. per dag under hela årskurs 2. I årskurs 3 berodde antal pass på om eleverna valt att läsa Matematik Diskret och/eller Matematik Breddning. Som mest kunde man även sista året få fem matematikpass i veckan. Mina erfarenheter av hur en sådan utläggning av tiden påverkar lärandet är att det fungerat väl, och att eleverna varken varit stressade eller visat någon leda. Tvärtom har deras positiva attityder till matematiken och algebran stärkts i samma grad som tiden för lärande har ökat.

Intresse, attityder och känslor

När vi inledde våra undersökningar om elevers algebralärande var vi inte riktigt medvetna om betydelsen av de *affektiva faktorerna*. De intervjuer och enkäter vi genomförde under årskurs 1 övertygade oss emellertid om att de måste ingå i en studie av det här slaget. I rapport II skrev vi:

> *Betydelsen av s.k. affektiva faktorer skall inte underskattas. Motivation och självförtroende är oerhört viktiga för all mänsklig verksamhet och*

inte minst gäller detta matematik. Ofta har man nog negligerat detta i matematikundervisningen.

Enligt Novak (1998) är dessa faktorer av fundamental betydelse för allt lärande:

Feelings, or what psychologists call affect, are always a concomitant to any learning experience and can enhance or impair learning. (s. 24)

I studien har vi preciserat de affektiva faktorerna:

- *intresse och motivation.*
- *attityder hos den enskilde eleven och kamraterna.*
- *självförtroende och känsla av att lyckas (eller misslyckas).*
- *socialt klimat i klassrummet.*

Att det är svårt, för att inte säga omöjligt, att få till stånd ett verkligt lärande hos eleverna om de saknar intresse och motivation tillhör lärarerfarenheten. En av lärarens viktigaste uppgifter måste därför vara att skapa en undervisningssituation som befrämjar elevernas lust att lära. Man måste utgå från att de elever som söker sig till naturvetenskapligt program har ett grundläggande intresse för matematik. Men hur är det med motivationen för den stora arbetsinsats som krävs för att klara samtliga matematikkurser som ingår? Erfarenheterna från grundskolan var mycket varierande. I fallstudierna ur rapport III vittnade några elever:

På låg och mellanstadiet tyckte jag matte var jättetråkigt. Men sen på högstadiet mognade jag och började förstå hur det fungerar. (flicka)

Under praktiskt taget hela grundskolan har jag förstått allting och har legat på de högsta betygen/poängen. Då jag har kunnat allt har jag ibland suttit sysslolös, och därför ser jag inte matematik som en utmaning längre. (pojke)

På högstadiet fattade jag knappt något och förstod inte vad det skulle vara bra för att kunna. Det gör jag nu. Vi har det i de flesta karaktärsämnen: fysik, kemi, teknologi. Det är ett måste att man kan det någorlunda. (flicka)

Dessa elevåsikter understryker några viktiga förutsättningar för god motivation. Det finns en nära koppling mellan förståelse och motivation. Om man inte förstår vad man gör, blir det så småningom tråkigt och intresset försvinner. Samtidigt måste matematiken utmana eleverna genom att försätta dem i nya, utvecklande situationer, annars blir den också av detta skäl grå och trist. Slutligen är det nödvändigt att på något sätt visa att den matematik man undervisar kring är användbar. Det sista citatet, som handlar just om algebra, pekar på att det på naturvetenskapligt program inte bör vara så svårt att se användbarheten inom exempelvis fysikämnet. Men det handlar också om att matematiken i gymnasiet har möjlighet att gå djupare än den gjorde i grundskolan. I ”Lusten att lära” refereras till gymnasieelevers åsikter:

> *I gymnasieskolan har de fått djupare förståelse för matematikens begrepp och metoder och ämnet har blivit intressant. Å andra sidan finns det många elever som inte är beredda att ge matematiken en chans när de kommer till gymnasieskolan. De har misslyckats alltför många gånger och obegripligheten har dödat motivationen.* (s. 15)

Upprepade misslyckanden är förödande för självkänslan. En elev som upplever detta mister förtroendet för sin egen förmåga att lösa svårare uppgifter. Säkerheten i begreppsbildningen försvagas och missförstånd eller brist på förståelse blir vanliga. Om det trots allt finns en drivkraft hos eleven att klara kursen, försöker han/hon att lära in vissa procedurer mekaniskt (rote learning). Dessa fungerar ibland, ibland inte, sett ur elevens synvinkel. Matematiken blir än mer obegriplig, och det slutar ofta med att eleven ger upp.

En elev som tappat självförtroendet måste få speciell hjälp. Läraren måste medvetet leda denna in i situationer där han/hon får lyckas. Glädjen i att få lyckas kan inte överskattas, och kan leda till kraftigt förbättrade resultat. Ett av de fall vi studerade var särskilt tydligt. Från en utgångspunkt med mycket dåliga förkunskaper och attityder kunde en elev trots allt klara samtliga obligatoriska matematikkurser på naturvetenskapsprogrammet (se rapport III, IV). För detta fanns det en övergripande förutsättning:

- *De viktigaste faktorerna för att klara upp ett dåligt utgångsläge är att man (både elev och lärare) tror det skall gå och att man får visst stöd (på den nivå man är).* (rapport II)

Det handlar alltså om ett ömsesidigt förtroende mellan eleven och läraren. Eleven litar på att läraren ska hjälpa honom/henne att finna en väg genom svårigheterna, och läraren litar på att eleven gör sitt bästa för att klara det. När eleven lyckas inleds en god cirkel, i vilken eleven får lyckas gång efter gång. Ett enstaka misslyckande förstör inte heller cirkeln om förtroendet och arbetsviljan finns (se t.ex. Pehkonen, 2001).

Avgörande för att eleven, som refererades till ovan, lyckades var också just arbetsviljan. Att inte ge upp när svårigheterna kommer, utan försöka igen tills förståelsen kommer, är en av de viktiga förutsättningarna för ett lyckat resultat. Tyvärr är det inte så ovanligt att elever ger upp nästan genast när något blir krångligt. Här kommer det sociala klimatet och kamraternas attityd in i bilden:

> *En faktor av vikt, som vi berört i den här rapporten, är kamratstödet. Vi har sett fall där det har varit av betydelse för att svaga elever skall lyckas. Vi tror att matematikinlärningen skulle öka i effektivitet om vi fick fler elever att samarbeta mer. Detta skulle inte bara vara bra för svaga elever utan även för duktigare. När man förklarar för någon annan, ökar man sin egen begreppsförståelse.* (rapport II)

Här knyts allt samman, kunskap och förståelse, övning och färdighet samt känslor och social gemenskap, till en helhet.

> *..., the complex interaction that takes place between stored information about knowledge, feelings and actions is very important in education.* (Novak, 1998, s. 25)

I den senare delen av studien undersöktes också hur tiden för lärande påverkar attityder och känslor. Vi hade observerat hur den alltför stressiga situationen i årskurs 2 påverkat dessa på ett negativt sätt:

> *En allvarlig negativ effekt av stressen är att i en del fall försvinner den positiva attityd till matematik, som eleverna fick under första året i gymnasieskolan.* (rapport V)

Den utökade tiden för matematik med de reviderade timplanerna möjliggjorde en naturligare arbetstakt genom kurs C och D. En del elever tyckte fortfarande att det gick lite för fort genom vissa avsnitt, men borta var den generella kritik som riktats tidigare. Många uttryckte tvärtom att tiden var precis lagom för det innehåll kurserna hade. Vid slutet av årskurs 3 hade de också i allmänhet en betydligt mer positiv inställning till matematiken. En av slutsatserna i rapport VI var:

- *Eleverna uttrycker i allmänhet en mer positiv attityd gentemot matematik efter sitt andra gymnasieår än de "gamla" eleverna. De goda affektiva faktorerna har större möjlighet att verka när det finns tillräcklig tid för dem.*

I rapport VII skrevs om det tredje gymnasieåret:

> *Den gynnsamma utvecklingen av elevernas attityder till matematiken och matematikundervisningen har glädjande nog fortsatt.*

Om eleverna ska ta med sig en positiv syn på matematiken ut i livet, och om de ska välja att studera vidare på högskolan inom matematikintensiva utbildningar, är det nödvändigt att detta inte hindras av stress och misslyckanden. Matematik skall kännas både roligt och angeläget att fortsätta med livet ut.

Sammanfattning av slutsatser

Resultaten av undersökningen av de fem huvudfaktorer, som påverkar gymnasieelevers algebralärande, kan sammanfattas i följande punkter:

- Ungefär en fjärdedel av nybörjarna i årskurs 1 hade mindre goda förkunskaper i algebra och även i aritmetik.
- God förståelse för variabelbegreppet, användningen av bokstäver samt god taluppfattning är viktiga förkunskaper, viktigare än att kunna omforma algebraiska uttryck.
- Man kan inte definiera någon minsta nivå på förkunskaper för att lyckas med algebran. De viktigaste faktorerna för att klara upp ett dåligt utgångsläge är att både elev och lärare tror det skall gå och att eleven får visst stöd på den nivå han/hon är.
- Lärarens sätt att möta eleverna i klassrummet är på många sätt avgörande. Eleven måste få börja med det hon/han verkligen kan och inte det hon/han enligt någon måttstock förväntas kunna. Både elev och lärare måste också tro att framsteg och lyckade resultat är möjliga.
- Betydelsen av god taluppfattning, även av negativa och rationella tal, kan inte nog betonas för att lyckas med algebran. Utan ordentlig förståelse av tal blir mycket av förenklingsalgebran obegriplig och eleven kommer hela tiden att göra fel. Om det finns brister i grundläggande taluppfattning, måste dessa repareras innan det blir meningsfullt att systematiskt träna förenklingar.
- Inlärningen sker ofta språngvis, och när ett hinder har övervunnits gör eleven väsentliga framsteg. Därför är det mycket viktigt att man ordentligt analyserar elevens fel och verkligen finner grundorsaken till varför eleven gör fel.
- Många elever har svårigheter att tillägna sig en strukturell uppfattning av algebran och dröjer kvar i en enbart operationell sådan. Det kan också dröja länge innan de högsta abstraktionsnivåerna för variabeluppfattning uppnås.
- De algebrakunskaper eleverna har med sig från årskurs 1 finns i de flesta fall kvar i slutet av årskurs 2 trots att de inte tränats speciellt

under läsåret. Förenklingsalgebran med hantering av binom och polynom och tillhörande ekvationer är en relativt stabil kunskap.

- Räknare och datorer klarar alla de omskrivningar, som ingår i traditionella skolkurser i algebra. Däremot klarar de inte av att översätta från ett problem till ett algebraiskt uttryck. Vi bör ha en ständigt pågående debatt om vad som är viktig matematisk kunskap och varför.
- Kunskaperna från årskurs 1 är stabila fram till slutet av årskurs 3. Med den utökade tiden i årskurs 2 blir även en stor del av algebrakunskaperna från årskurs 2 stabila.
- Affektiva faktorer som intresse, motivation och självförtroende är mycket viktiga för att man skall lyckas med algebran.
- Kamratstöd och arbete i smågrupper har stor betydelse. Elever med dåliga förkunskaper har haft mycket hjälp och nytta av att de samarbetat med lite duktigare kamrater. Samtidigt har dessa kunnat förstärka sin egen begreppsförståelse genom att förklara för de övriga.
- Stödtiden, som gavs till elever med svaga förkunskaper under årskurs 1, var ett lyckat undervisningsförsök som resulterade i en permanent organisation.
- Det måste finnas en överensstämmelse mellan matematikkursernas innehåll och den tillgängliga tiden för lärande. I annat fall resulterar det i dålig begreppsutveckling och instabila färdigheter.
- Att ha tillräcklig tid för lärande har stor betydelse för de affektiva faktorerna. Tidsbrist skapar stress och negativa attityder, som har återverkningar långt efter gymnasietiden. God tidstillgång främjar ett meningsfullt, positivt lärande och skapar möjligheter för eleverna att övervinna sina bokstavliga svårigheter.

6. Implikationer för undervisningen

I en så bred studie som denna, i vilken målet varit att identifiera ett antal faktorer som påverkar lärandet, är det givet att mängden data blir ganska stor. Resultaten blir också tämligen omfattande och kan vara svåra att överblicka. Samtidigt är det viktigt att eventuella slutsatser av studien har möjlighet att förmedlas till dem de främst berör, nämligen de undervisande lärarna. Min och Tomas ursprungliga utgångspunkt var trots allt att förbättra vår egen undervisning, och de resultat vi kommit fram till bör ha bra möjligheter att komma fler lärare tillgodo. Därför är det önskvärt att framhålla de implikationer för undervisningen studien kan tänkas medföra. Här presenteras de som ett antal imperativ, som dock inte gör anspråk på att vara heltäckande för resultaten.

Utgå från vad eleverna vet

Jag vill börja med ett citat av Polya (2004), som handlar om problemlösning, men som egentligen är fundamentalt i matematikundervisning generellt:

> *Det är dumt att svara på en fråga som man inte har förstått. Det är ledsamt att arbeta mot ett mål som man inte känner någon strävan att nå. Sådana dumma och ledsamma saker händer ofta, i och utanför skola och universitet, men en lärare måste försöka förhindra att sådant händer i hans klass. Eleverna måste förstå problemet. Men de bör inte bara förstå det, de bör också känna en önskan att kunna lösa det. Om en elev inte riktigt förstår ett problem eller saknar intresse för det är det inte alltid hans fel. Problemet måste vara väl valt, inte för svårt och inte för lätt, naturligt och intressant, och tid måste anslås för att ge det en naturlig och intressant presentation.* (s. 27)

Här finns i ett nötskal mycket av vad god matematikundervisning handlar om. Samtidigt är det verkligen inte någon lätt sak för läraren att uppfylla. Man hör ibland elever säga om en matematiklärare, som de anser vara bra, att han eller hon ”förklarar bra” och ”då lär man sig mycket”. Det handlar då säkert om att läraren ifråga lyckas väl med det Polya beskriver ovan och på så sätt förmår föra fram både elevernas kunnande och intresse för ämnet.

För att en begreppsutveckling alls ska ske, måste med ett socialkonstruktivistiskt synsätt undervisningen befinna i den närmaste utvecklingszonen (Vygotskij, 1978). Man måste då för varje elev ta reda på var den är och börja där. Annars händer ingenting med elevens kunskaper. Möjligen kan man tillfälligt ”hamra in” mekaniska kunskaper, men eftersom dessa inte passar in i begreppsbygget faller de strax platt till marken. Det är detta man observerar när eleven uppvisar vissa kunskaper på ett prov, för att veckan efter säga sig aldrig ha hört talas om det ens. Det är också viktigt att komma ihåg att *både* utveckling av förståelse *och* färdigheter måste börja i den närmaste utvecklingszonen. Som två sidor av samma mynt kan de inte separeras.

Även inom Ausubels assimilationsteori (Ausubel, 1968) var elevens relevanta förkunskaper en av grundförutsättningarna för ett meningsfullt lärande. Trots att man alltså sedan länge har insett betydelsen av att ta reda på vad eleverna vet innan man påbörjar undervisning inom ett visst område, har denna vetskap dessvärre inte haft tillräckligt genomslag. Ofta utgår man istället från vad man anser att eleverna *borde* veta eller efter vad läroboken eller kursplanen föreskriver.

Hur tar man då reda på vad den enskilde eleven vet? Det måste bli en kombination av flera sätt. Om man vill ha en snabb bild av hela klassens status, t.ex. när man som gymnasielärare tar emot den från grundskolan, kan förkunskapstest vara ett bra redskap. Man måste emellertid genomföra sådana med stor försiktighet. Det är ju inte meningen att testet hårdhänt ska demonstrera för eleverna hur *lite* de kan. I så fall kan testet få en förödande inverkan på de affektiva faktorerna och ta bort elevens intresse redan från början. Istället bör det inriktas på att visa vad man faktiskt kan, men även var gränserna för kunnandet går. Absolut nödvändigt är att noggrant diskutera resultatet av förkunskapstestet med varje elev och göra upp en plan för hur han/hon ska komma in i den aktuella undervisningen.

Förkunskapstest och även senare diagnostiska test tillhör vad man kallar *formativ bedömning*, som är en del av undervisningen och till för att planera fortsättningen av den (jfr. *summativ bedömning*, vid vilken man summerar vad en elev kan vid en viss tidpunkt, exempelvis med skriftliga eller muntliga prov). När man känner eleverna i en klass väl och har någorlunda god kännedom om hur var och en arbetar, blir det ofta inte så nödvändigt med skriftliga test. Istället får man i de egna samtalen med eleverna och då man lyssnar på elevernas samtal en lika god eller till och med bättre bild av var deras kunnande befinner sig. En erfaren lärare kan ofta i minnet hålla reda på var varje elev står, men det är en fördel att även göra någon form av skriftliga noteringar.

Det är inte ovanligt att elever råkar ut för *missuppfattningar* av begrepp eller räkneregler, som medför upprepade fel i lösandet av en viss typ av uppgifter. Speciellt tydligt blir detta när algebra används, eftersom minsta fel (t.ex. teckenfel) får stora konsekvenser för resultatet. Att bara försöka lösa ännu fler uppgifter av samma typ, utan att förstå vad som går fel, är meningslöst eller kanske t.o.m. till skada för eleven. Här måste läraren bistå med sitt expertkunnande för att hjälpa eleven att lösa upp knuten. Först måste man noggrant tillsammans ringa in problemet, och sedan diskutera begreppet eller regeln, tills man fullt ut har förstått vad felet berott på. Detta kan kosta på, mest för eleven, som tvingas ändra sitt begreppsbygge, men även för läraren, som måste ha tålamod. Man får inte släppa taget förrän problemet retts ut! Belöningen för mödan kommer när eleven därefter klarar en hel grupp av uppgifter, som det tidigare bara blivit fel på.

Räkna med olika betydelser av bokstäver och uttryck

Det är lätt att underskatta elevernas problem med att förstå hur bokstäver och algebraiska uttryck faktiskt används på flera olika sätt och har skilda betydelser, beroende på kontexten. Bokstävernas funktion som beteckning för *specifika okända tal*, *generaliserade tal* eller *variabler* (Küchemann, 1981) måste medvetandegöras för eleverna. Det är vanligt att de som är vilse i algebran inte alls kan skilja på de här funktionerna. De rör istället samman dem så att svaren på uppgifter lätt blir av typen ”goddag, yxskaft”.

Läraren måste tydligt demonstrera för eleverna skillnaden mellan att lösa en ekvation, göra en förenkling eller bearbeta en funktion. Vilka metoder får man använda i de olika fallen och vilka typer av svar förväntar man sig? Bloedy-Vinner (2001) skriver:

> *As to the difficulty in determining which letters holds which roles, students should know that the roles are context dependent (an issue rarely discussed in the classroom). They should always be told what the role of each letter is, and where the information which determines it comes from.* (s. 184)

I den välbekanta generella formeln för en linjär funktion, $y = kx + m$, uppträder bokstäverna i tre olika roller: x är *oberoende variabel*, y är *beroende variabel,* och k och m är *parametrar*. Den som själv har arbetat mycket med linjära funktioner, och det har ju verkligen en matematiklärare, kanske underskattar de problem eleverna har med att förstå skillnaden mellan de tre rollerna. Det är väsentligt både att tänka igenom hur man egentligen själv vet skillnaden och att sedan uttömmande diskutera den med eleverna.

I naturvetenskapsprogrammets kurser uppträder variablerna i ännu en roll, nämligen som *tillfällig* (dummy) *variabel*. Exempel är $\int_0^1 x^2 dx$ eller $\lim_{x \to 3} x^2$, där x bara fungerar som variabel i uttrycket x^2 tills en operator (integral resp. gränsvärde) använts på det. Därefter försvinner variabeln och ersätts av ett värde. Vilken bokstav som används för den tillfälliga variabeln har ingen betydelse. Exempelvis är det ingen skillnad mellan $\int_0^1 t^2 dt$ och integralen ovan. Detta är ofta svårt att förstå för eleverna, som lätt kan haka upp sig på ett sådant byte av bokstavssymbol.

På samma sätt måste man noggrant diskutera betydelsen och användningen av algebraiska uttryck. Antag, att eleverna arbetar med uttrycket: $y = 3(2x - 5) - 5(x - 2)$. Vad står uttrycket för och hur ska det bearbetas? Det är som Bloedy-Vinner skriver *kontextberoende*, men också avhängigt av vilket resultat man *förväntar* sig. Uttrycket kan tolkas som en funktion, man kan ta fram värdepar, rita en graf m.m. Men högerledet i likheten kan lyftas ut och blir då ett uttryck i x som går att förenkla, dvs. tillämpa strukturella algebraiska regler på. Om en annan likhet, $y = 3 - x$, kombineras med de tidigare, förvandlas situationen till ett ekvationssystem med ett enda lösningspar (x,y). Speciellt när man arbetar med funktioner blandas de olika sätten att uppfatta uttryck i en och samma uppgift, vilket hos många elever ställer till stort bryderi och ofta leder till diverse missuppfattningar.

Studien visar att man som lärare måste ägna speciell tid och ansträngning åt att reda ut betydelsen av tecken, bokstäver och uttryck, speciellt för de elever som har svårigheter med algebra. Annars blir algebran för eleverna ett obegripligt ”hokus pokus”, som man aldrig förstod sig på.

Arbeta med algebra utgående från flera perspektiv

Att i undervisningen utgå från flera perspektiv är besläktat med det som togs upp i föregående avsnitt, men handlar mera om hur eleverna leds fram till en allsidig förståelse av vad algebra används till. Det rör sig också om att motivera eleverna för den stora intellektuella ansträngning, som är nödvändig för att lyfta matematikkunnandet till denna högre abstraktionsnivå.

Redan i prealgebran och den tidiga algebran närmar man sig algebran från flera håll och med olika perspektiv. I uppgifter, som: *Fyll i talet som* *gör likheten sann: 20 = ___ + 7* , är det ett bestämt tal som söks. Luckan ersätts senare kanske med en grafisk symbol, som ◆, och så småningom med x eller någon annan bokstav. Ekvationerna blir efterhand allt svårare, men det som dominerar hela vägen är tanken på att *ett hemligt tal ska avslöjas*. Algebran blir här ett *problemlösningsverktyg*, nämligen för att finna det hemliga talet. Problemet, som ledde fram till ekvationen, var kanske alltför komplicerat för att lätt lösas med vanlig aritmetik, och algebrafärdigheterna gör att dessa svårigheter övervinns.

Detta sätt att motivera varför man ska lära sig ekvationslösning tror jag är väldigt vanligt i skolundervisningen. Problemet är bara att det är svårt att övertyga eleverna med det här argumentet. De tidiga stegen i ekvationslösning tas med så enkla ekvationer, att det för eleverna ter sig som mycket lättare att använda vanlig aritmetik istället. Även i ”ren” ekvationslösning tillämpar eleverna i hög grad ett aritmetiskt tänkande. Man når då fram till besvärliga ”trösklar”, som det kan vara mycket svårt för eleverna att ta sig förbi. En ekvationstyp, som man tidigt träffar på, är $7x-13=15$. Den löser man enkelt genom att räkna baklänges. Man adderar 13 till 15 och delar resultatet med 7, alltså vanlig aritmetik. Bokstaven fungerar här bara som en platshållare. Men så kommer nästa steg med en ekvation som $7x-13=4x+7$, där x finns i båda leden. De aritmetiska metoderna slår slint (även om en del elever försöker sig på felaktiga sådana), eftersom det här krävs färdigheter i strukturell algebra.

Den *strukturella algebran* kan ses som ett system av regler, som ska läras in och övas i gradvis mer komplicerade konstellationer. Kirschner (2001) skriver:

> *The structural approach builds meaning internally from the connections generated within a syntactically constructed system.* (s. 84)

Algebran blir här “ren” matematik, som härleds via axiom och satser och är helt frikopplad från ”verkligheten”. Den abstrakta algebran, som läses på högskolan, är uppbyggd just så här, men hur är det i grund- och gymnasieskolan? Dessvärre är det nog många elever som ser algebra enbart som ett isolerat, abstrakt område av matematiken. Naturligt nog ifrågasätter de kraftigt nyttan med att lära sig algebra, och deras kunnande sträcker sig oftast inte förbi skolavslutningen.

Men är det då en felaktig syn på algebra som vi bör avlägsna från skolundervisningen? Nej, jag menar att det måste vara *ett* av de perspektiv vi tillämpar. Man får inte göra hur som helst, och algebrans ytterst exakta lagar och satser *måste* eleverna lära sig. I aritmetik kan man ibland behandla talen lite slarvigt och ändå komma fram till någorlunda rätt svar. Men i algebra leder oftast minsta lilla misstag till fullständiga nonsenssvar.

Algebra kan ses som en mall för hur vanliga tal beter sig och vilka räkneoperationer som är tillåtna för dem. Detta *generaliseringsperspektiv* används också då mönster av skilda slag bearbetas, för att till sist beskrivas med ett algebraiskt uttryck. Övningar, som baseras på mönster, finns med i undervisningen ända från förskolan och är numera en av de vanligast förekommande vägarna till algebraförståelse. En typisk uppgift kan vara att visa de första stegen i en geometrisk mönsterutveckling, lagd med tändstickor. Antalet tändstickor i varje figur ska räknas, därefter ska man lista ut hur många det blir i de två närmast kommande figurerna samt i exempelvis den 100:e figuren. En regel för hur många tändstickor det finns i den n:te ska anges, först med ord och därefter som ett algebraiskt uttryck. Den sista delen av uppgiften uppträder först när bokstavssymboler har börjat användas.

Att *verbalt* kunna beskriva ett algebraiskt samband är ytterst viktigt för förståelsen (se t.ex. Stacey & MacGregor, 2001, s. 147-148). De elever som kan ge en korrekt verbal beskrivning av sambandet är signifikant bättre på att skriva rätt algebraisk regel. Detta är således en färdighet, som tid speciellt måste ägnas åt.

Att beskriva mönster tycks ligga nära *funktionsperspektivet*. Antalet tändstickor kan ju kallas y och figuren nummer x. Stacey och MacGregor visar dock att denna överföring inte fungerar automatiskt och ofta inte särskilt bra. Man måste arbeta specifikt med algebra som används i samband med funktioner och med de olika *representationer* sambanden kan ges: *text eller situation*, *tabell*, *graf* och *symboliskt uttryck*. Det är nödvändigt att träna samtliga transformationer, "översättningar", mellan representationerna för att eleverna ska få en allsidig bild av funktionsbegreppet och kunna använda sig av det i problemlösning med ett *modelleringsperspektiv*.

En översikt över transformationerna ses här i tabellform (se Persson, 2002, s. 29):

Till \ Från	Situationer Text	Tabeller	Grafer	Formler Symboler
Situationer Text		*tolka tabeller*	*tolka grafer*	*känna igen och tolka*
Tabeller	*samla in data*		*avläsa punkter*	*beräkna värden*
Grafer	*skissa grafer*	*plotta grafer*		*plotta funktioner*
Formler Symboler	*modellera situationer*	*anpassa formel till data*	*anpassa funktion till graf*	*omskriva, manipulera*

Fördelen med funktionsperspektivet är att det ökar möjligheterna för eleverna att studera algebraiska samband och bokstavligen få en bild av dem. Här är de moderna *grafräknarna* till ovärderlig hjälp, och de öppnar också dörren för en mycket större variation av undervisningsmetoderna. Antag att vi ska undersöka det kvadratiska uttrycket $4-3x-x^2$. Vilka värden kan uttrycket anta för olika x? Kan olika x ge samma värde? Blir uttrycket lika med noll för något x, och för vilket/vilka i så fall? Naturligtvis kan man med kvadratkomplettering omforma uttrycket och sedan resonera utifrån det. Men en mer direkt bild får man om man sätter y lika med uttrycket och låter räknaren rita upp funktionen. Nollställen, största värden och symmetri ser man med en blick, och räknarens inbyggda verktyg ger snabbt värdena. Om man vill försäkra sig om exakt symmetri kan man exempelvis använda räknarens tabellfunktion. Vill man föra upp diskussionen på en högre teoretisk nivå, kan man kanske ställa frågan om hur många nollställen kvadratiska uttryck kan tänkas ha och undersöka vad som bestämmer det. Därefter bör man, menar jag, *också* utföra kvadratkompletteringen och koppla resultatet av den till vad man ser i grafen.

Det finns även skäl att se algebran, inte som en isolerad företeelse inom matematiken, utan i ett större sammanhang, kopplad till samtliga matematikområden och till andra skolämnen. Lins (2001b) argumenterar för ett nytt sätt att organisera algebraundervisningen, där vi inte bara ser till ”meningsfullt lärande” utan även ser till vilka olika ”meningar” algebran har för den enskilde eleven och i den enskilda kontexten. Han menar också att man kan arbeta med ”naturliga” områden, som går tvärs genom de traditionella. ”Tänkande med hela och delar” kan innehålla bråk, lite algebra, lite geometri och lite statistik. ”Tänkande med vågar” innefattar lite fysik, lite algebra och lite mätteknik. Hans utgångspunkt är grundskolan, men detta går naturligtvis utmärkt att överföra till undervisning på gymnasienivå. Algebran får här ytterligare ett perspektiv, som en naturlig del av en lång rad kunskapsområden, i vilka den fungerar som ett av flera *språkliga uttrycksmedel.*

Elevernas färdigheter inom algebra är i färd med att förändras. Fokus för undervisningen både i grundskolan och i gymnasiet förskjuts från träning av färdigheter som förenklingar, specialregler och svårare ekvationslösning mot färdigheter, som handlar om tolkning och användning av algebraiska symboler och uttryck, förmåga att se mönster, uttrycksformer, m.m. Denna utveckling stöds exempelvis av hur de nationella proven behandlar algebra, och har även haft genomslag i nyare läroböcker. Det finns starka skäl att anse denna process vara positiv, eftersom det handlar om att prioritera elevernas grundförståelse för algebra och för vad algebra kan användas till. Naturligtvis är det också nödvändigt med träning av räknefärdigheterna och räknereglerna, men mycket av de mer avancerade delarna (som kvadreringsreglerna, konjugatregeln, etc.) kan för de flesta eleverna sparas till gymnasiet.

De erfarenheter och de slutsatser, som kunnat dras av denna studie, är att läraren behöver använda en bred arsenal av olika sätt att närma sig de algebraiska begreppen i undervisningen. Varierande perspektiv ger en allsidigare och flexiblare bild av vad algebra är och till vad den kan nyttjas. Vidare ger det en omväxling i undervisningen, som av eleverna upplevs som positiv och stärker deras vilja och intresse för att lära sig algebra.

Låt eleverna samarbeta

Det händer att man möter lärare, föreläsare eller andra, som förespråkar användningen av ett visst arbetssätt i undervisningen. Ofta stöder man sig på gjorda studier, som visat att just detta arbetssätt varit gynnsamt för elevers lärande. Slutsatsen man drar av detta är tyvärr ibland att om man övergår till att bara arbeta så här, skulle resultaten av undervisningen förbättras generellt.

Jag menar, att man måste vara mycket försiktig med att dra alltför långtgående slutsatser av sådana lokala försök. Alla studier (även den här!) har sina begränsningar i tid och rum samt inte minst vilka elever och lärare som deltagit. Ett arbetssätt som fungerat väl i en viss situation kanske helt misslyckas i en annan. Detta har ofta drabbat dem, som försökt omsätta resultaten från en sådan studie till en undervisningsorganisation i stor skala.

Istället bör man införliva det nya arbetssättet med en arsenal av skilda metoder man som lärare kan välja mellan, beroende på vilken elevgrupp man arbetar med eller den kontext man utgår från. Det är även av stor betydelse att man inte hela tiden arbetar med exakt samma metoder, så att varje lektion blir förutsägbar. I ”Lusten att lära” (Skolverket 2003, s. 22) står det om behovet av en varierad undervisning:

> *Variation, flexibilitet och att undvika det monotona i undervisningen är viktigt för lusten att lära. Formen för inlärning behöver växla för att tillgodose elevers olika sätt att lära. Det gäller såväl innehåll, relevanta arbetsformer, arbetssätt och läromedel.*

Man bör alltså i planeringen av kurserna medvetet tänka på *variationen* för den enskilde eleven. Med ett konstruktivistiskt synsätt innehåller undervisningen starka inslag av *kommunikation*, skriftlig och muntlig, mellan lärare och elever, mellan elever och elever. Björkqvist (1993) menar att elevens individuella matematiska erfarenheter i mycket hög grad är knutna till verbal kommunikation:

> *Språklig variation ingår som en del av den kontextuella variationen.*
>
> *Växelverkan med andra elever i matematiska sammanhang hjälper eleven att testa sin kunskap i avseende på livskraft.* (s. 15)

Undervisning med *gemensamma samtal* i matematik som utgår från elevernas tankar, där dessa är aktiva och olika lösningsstrategier diskuteras och värderas, upplevs mycket positivt av eleverna. Sådana samtal kan ske i helklass, i grupp, mellan två elever, med och utan läraren som aktiv deltagare. I vårt arbete med eleverna inom studiens ram har vi försökt befrämja *samarbete* i olika former, och vi menar att detta har förbättrat både resultatet av undervisningen och attityderna till matematikämnet.

Det har huvudsakligen varit tre former av samarbete, som använts i de klasser som deltagit i studien. Den första, och minst organiserade, har varit det *spontana samarbetet* mellan i första hand par av elever, men ibland tre eller flera. Eleverna har från första början fått klartecken för att fritt prata matematik under övningarna. Detta har naturligtvis inte gällt under helklassamtalen eller när läraren exempelvis har demonstrerat lösningsmetoder, då en viss ordning krävs. Men när man arbetat med övningar eller problem har man fått röra sig fritt i klassrummet för att utbyta matematiska tankar med kamraterna. Här kommer också det utomordentligt viktiga *kamratstödet* in i bilden som en av de betydelsefulla stödjande faktorerna för lärande. De elever som istället ville ha en helt tyst arbetsmiljö, fick sina behov tillgodosedda genom möjligheten att arbeta i ett grupprum med sträng tysthetsregel.

Den andra formen av samarbete var *problemlösning i grupp*, som alla måste delta i. En lektion per vecka avsattes till större problem, som ibland hade direkt anknytning till det som för tillfället behandlades i kursen, och ibland övade någon fristående problemlösningsteknik. Problemet var ofta uppdelat i delproblem med olika svårighetsgrad, som eleverna fick välja mellan. Uppgiften var att lösa delproblemen enskilt eller tillsammans i gruppen och sedan redovisa lösningarna för varandra. Eleverna uppmuntrades att ta fram flera olika lösningssätt. Vilken som helst i gruppen skulle sedan kunna redovisa lösningen inför hela klassen i slutdiskussionen, vilket nödvändiggjorde att man sett till att alla förstått den. Detta arbetssätt upplevdes av eleverna som mycket positivt och befrämjande för problemlösningsförmågan hos alla.

Den tredje formen var ett mera traditionellt *grupparbete*, där grupperna fick uppgifter som skulle redovisas skriftligt och ibland även muntligt. Formerna var här mer fria, och mycket av arbetet handlade om att söka egen kunskap och att kommunicera den på ett bra sätt till andra människor. En viktig iakttagelse var att övningarna i skriftlig och muntlig kommunikation gjorde det lättare för eleverna att i de nationella proven klara uppgifter, som just byggde på att man skulle förklara matematiska sammanhang i verbala framställningar. Bl.a. inom de stora uppgifterna med bedömningsmatris, som avslutar varje nationellt prov, lyckades även tämligen svaga elever presentera hyggliga texter.

Lärande måste få ta tid

Ofta anges av lärare tiden som en bristvara i skolan, och de anger det som ett av skälen till att matematikundervisningen inte lyckas bättre än den gör. Delvis kan man ge dem rätt i det. I vår undersökning identifierade vi tidsbrist som en av de negativa faktorerna när det gäller elevernas begreppsutveckling. Tidsbristen uppstod som en följd av att timplanerna för vissa kurser var för snålt tilltagna i förhållande till det matematiska innehållet i dem. Det har nog till viss del kännetecknat läroplansutvecklingen de senaste decennierna att man velat ta in alltfler moment i undervisningen, utan att samtidigt öka tiden för lärande. Följden har tyvärr, för många elever, blivit en stressig arbetssituation och otrivsel.

Lärande måste få ta tid, och den tiden är olika för varje individ. Begreppsutvecklingen är heller inte likformig utan går ibland långsammare, ibland snabbare, tar plötsliga språng eller hakar upp sig. Om undervisningen verkligen ska vara individualiserad, måste vi ta hänsyn till det. Nyckelpersonen är läraren, som med sitt kunnande och sin erfarenhet kan underlätta elevernas lärande på många olika sätt (se Skolverket, 2003). Samtidigt får man akta sig för att göra undervisningen individuell istället för individualiserad, så att var och en räknar i egen takt för sig. Förutom den för eleverna sämre lärandemiljön, medför det också att läraren simultant måste hålla aktuellt kanske trettio olika undervisningslägen i kursen varje lektion. Detta, om något, måste vara förödande för en effektiv tidsplanering.

Hur ska man då förhålla sig till vad man uppfattar som en snäv tidstilldelning? Mindre bra är att ta innehållet i kursen (ofta läroboken!) och bara dela upp det på hur många veckor man har. Istället måste man betrakta kursens olika moment. Vilka är centrala och leder vidare till nästa kurs? Dessa måste prioriteras på bekostnad av mindre centrala moment. Med den första elevgruppen vi undersökte gjorde Tomas och jag just en sådan prioritering. Tyvärr var ändå den tillgängliga tiden för kort för två av kurserna, men detta rättades till vid läroplansrevideringen 2000. En annan viktig diskussionsfråga är vilka tidsvinster man kan uppnå med förändrade undervisningsmetoder, som blir möjliga med användningen av grafräknare, symbolhanterande räknare och datorer i matematiken. Naturligtvis måste man då göra klart för sig vilka manuella färdigheter eleverna bör ha, och det är en diskussion som bör föras både lokalt och nationellt.

Slutligen är det naturligtvis så att en individuell färdighetsträning är nödvändig för att få säkerhet och flyt i matematiken. Det måste finnas tid, både i och utanför skolan, för sådan träning. Att organisera en ”räknestuga”, dit eleverna kan gå för att träna färdigheter och få hjälp när de fastnar, kan vara en bra metod. Hemuppgifter är en annan och viktig del i den individuella träningen. I vissa sammanhang har det förts fram att man inte bör ”utnyttja” elevernas fritid, men det är svårt att på allvar hävda en sådan syn med ett konstruktivistiskt förhållningssätt. *All vår tid är potentiell tid för lärande.*

Tro på elevernas möjligheter

Ett av de viktigaste resultaten av den här studien är de affektiva faktorernas stora betydelse för elevernas utveckling. Om både eleven och läraren tror på ett lyckat resultat och eleven är villig att lägga tid och energi på att uppnå ett sådant, så kommer det att klaras av. Det finns i grunden inga ”hopplösa fall”, utan i princip kan alla lära sig matematik och då även algebra. Feigenbaum (2000) beskriver en studie, i vilken elever med inlärningshandikapp (Learning Disabilities) undervisades i algebra. Det var på en tämligen svår nivå, inkluderande förenklingar och ekvationer, även rationella sådana. Resultaten var förbluffande goda och hon skriver:

> *I have seen students with little exposure to algebra enter the LD algebra class scared, knowing that passing the algebra course is crucial to receiving an associate's degree. With hard work in an environment that is conductive to their learning, these students with learning disabilities have demonstrated that they can be successful in the study of mathematics by developing and using strategies that focus on their strengths. More important, they feel better about themselves both as students and as individuals.* (s. 274)

Jag menar, att man som lärare alltid måste tro på att alla elever kan klara den matematik man arbetar med, givet vissa förutsättningar som exempelvis intresse och arbetsvilja. Man måste också tro att det alltid finns någon metod att övervinna varje svårighet eleverna har, och att det bara gäller att komma fram till den.

Som tidigare har nämnts, är kamratstödet och den sociala miljön i klassrummet ytterst viktigt och speciellt då för dem som har det mer arbetsamt än andra att nå målen. Man måste som lärare tänka mycket på hur man främjar en god anda i det dagliga arbetet, och att man måste organisera det så att en sådan har möjlighet att skapas. Om eleverna känner trygghet, nyfikenhet, framåtanda och lust i matematikundervisningen, är prognosen för att lyckas mycket stor. Här kommer elevernas delaktighet och möjligheter att påverka undervisningen också in i bilden. Ett demokratiskt förhållningssätt i klassrummet är grundläggande för att skapa en god social miljö.

En annan viktig faktor för att öka motivationen är att eleverna förstår målen och syftet med sitt lärande. Varför ska man egentligen ta sig över ett visst hinder? Vad händer om man inte gör det? Hur lär man sig nya saker? En metakognitiv diskussion om lärande kan i hög grad underlätta och stödja de metoder och arbetssätt man använder. Bland de följder, som uppstod av att studien genomfördes, var att vi naturligt kom att diskutera lärande med eleverna. Detta var från början inget mål i sig, men gav viktig lärdom om betydelsen av en sådan diskussion.

Det är inte lätt att i alla situationer göra matematiken ”rolig”, i betydelsen ”skojig”. Ibland handlar det snarare om hårt slit, och detta bör man ingående diskutera med eleverna. När det går trögt med någon bestämd färdighet får man ”puffa på” en aning, så att man arbetar vidare. Att till slut lyckas blir en belöning i sig och gör matematiken ”rolig”. Men det är inte fel att i undervisningen då och då använda sig av skojiga problem eller övningar för att lätta upp det dagliga slitet. Det kan ske till exempel i form av små matematiska ”nötter” eller när man arbetar med problemlösning i grupp. *Matematiken behöver vara lustfylld.*

Samarbeta med matematiklärare över gränserna

Undervisning i matematik bör ses i ett livslångt lärandeperspektiv. Från förskolan, genom grundskolan, gymnasiet, högskolan och vidare i livet går en röd tråd av matematikkunnande. Vi kan lära oss nya saker, eller kanske glömma bort det vi tidigare kunnat. I vårt medvetande formas bilder av vad matematiken handlar om och vad den kan användas till. Hela tiden förändras bilderna genom våra erfarenheter, men kärnan förblir oftast vad vi lärde oss tidigt i skolan.

Det finns en risk att man som lärare inom gymnasieskolan bara inriktar sig på de matematikkurser som finns där. Man testar de elever man tar emot från grundskolan, kanske klagar lite på dåliga förkunskaper, undervisar eleverna genom de olika kurserna och kontrollerar att de minst uppnår godkänt-nivåerna i slutänden. Därefter skickas de ut i livet, till ett arbete eller till en vidareutbildning, men utan att man behöver bry sig mer om hur det går för dem. Det är väldigt lätt att man blir ”hemmablind” på det här sättet. Jag menar att detta inte är något bra förhållningssätt utan istället kontraproduktivt på flera sätt.

Bristande förkunskaper beror ju på att eleverna tidigare har misslyckats med matematiken på ett eller annat sätt. Det kan handla om bristande taluppfattning, missförstånd i aritmetiska eller algebraiska beräkningar osv. Men *varför* har dessa brister uppstått? *Hur* kan de rättas till? Och vilka matematiska erfarenheter har egentligen eleverna fått under tidigare skolstadier?

Under mina år som lärare har jag deltagit i några olika försök till stadieövergripande endagarskonferenser. Jag har upplevt dem både ur grundskolans och ur gymnasiets synvinkel. Man har samlats för att diskutera framför allt övergången mellan grundskolans sista år och gymnasiet. Mycket av diskussionen har handlat om att upprätta listor över kunskaper och färdigheter man ansett eleverna bör ha då de kommer till gymnasiet. Men ofta har det också kommit till beskyllningar – och motbeskyllningar – om tillkortakommanden hos de båda skolformerna. Det kan vara påståenden som:

– *Eleverna ska kunna xxx när de börjar på den här skolan. Varför kan de inte det?*
– *Men vi har lärt dem det vi ska. Det måste vara nåt fel på er undervisning.*

Denna typ av "samarbete" över gränsen är inte speciellt givande och har sällan fått någon bestående inverkan på hur undervisningen bedrivits.

Jag vill istället starkt framhålla vikten av att man skapar *lokala nätverk* av matematiklärare från förskola till gymnasium och med kopplingar till högskolan. I Matematikdelegationens betänkande "Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens" (Utbildningsdepartementet, 2004) lyfts bildandet av sådana nätverk fram som ett av de viktigaste förslagen:

> *Alla barn och ungdomar skall ha likvärdiga möjligheter att lära sig matematik i ett genomtänkt sammanhang från förskola till högskola. Vi måste inspirera och stödja olika forum för kontakt mellan lärare och utbildningsanordnare av alla kategorier.* (s. 97)

Som nämndes i kapitel 1, var sammanträffandet med matematiklärare från alla stadier en av de drivkrafter som gjorde att jag själv vidareutbildade mig och att denna studie kom till stånd. Genom detta samarbete och genom utvecklingsprojektet "Den Röda Tråden" jag startade och deltog i, fick jag mycket kunskap om matematikundervisningen på för- och grundskolan. Den kunskapen hade jag stor nytta av i min egen undervisning, och mitt intryck var också att övriga lärare kunde dra nytta av vad jag kunde relatera från gymnasieundervisningen. Genom att medvetet släppa isoleringen i vårt arbete med matematikämnet och istället samarbeta kring didaktiska och ämnesmässiga frågor, fick vi tillgång till alla de fördelar detta medför, som att få möjlighet att diskutera och reflektera över vår egen undervisning eller få idéer till hur den skulle kunna förbättras.

Ett speciellt hinder för samarbete har varit att styrdokumenten för de olika skolformerna inte alltid passat samman så väl. Matematikdelegationen föreslår därför att det tas fram ett sammanhängande kommentarmaterial till matematiken i förskolans, skolans och vuxenutbildningens läroplaner, kursplaner och tillhörande prov- och bedömningssystem:

> *Helhetstänkande och samordning bör bli en viktig del av kommentarinnehållet. Ämnets progression från förskola till högskola bör diskuteras. Likaså hur matematikens stora idéer genomsyrar utbildningen. Beskrivning av kritiska tillväxtpunkter i förståelsen, viktiga begrepp samt vanliga missuppfattningar kan ge lärarna ytterligare vägledning.* (s. 144)

I många kommuner arbetar man redan med nätverk för matematiklärare, men sådana bör i framtiden finnas överallt. Bäst fungerar nätverken om de bygger på de undervisande lärarnas eget intresse av att förbättra undervisningen, som enligt mina erfarenheter är mycket stort. Mitt råd till alla matematiklärare är att försöka ta initiativ till och börja arbeta i ett sådant nätverk.

Det är också viktigt att skaffa goda kontakter med olika högskolor och universitet. Lättast kan det vara att börja med lärarutbildningarna, som ju ska ha naturliga kopplingar till skolorna, bl.a. genom att de lärarstuderande genomgår verksamhetsförlagd utbildning. Men även övriga högskolor har som en uppgift att hålla kontakt med exempelvis gymnasierna, och då kan det vara en god idé att rikta denna kontakt mot det lokala nätverket. För att elever i framtiden ska kunna rekryteras till matematikintensiva högskoleutbildningar, måste ett mycket intimare samarbete komma till stånd.

I själva verket uppvisar grundvillkoren för lärande på olika stadier, från grundskolans lägre åldrar ända till doktorandutbildningar på universitetsnivå, många direkta likheter. Grevholm, Persson och Wall (2004) pekar, i sin utvärdering av den speciella modell för doktorandutbildning man utvecklat, på den stora betydelse som kamratstöd i arbetsgrupper, aktivt handledarskap med den närmaste zonen för lärande i fokus och omsorg om den psykosociala miljön har för framgångar i studierna. Arbetssättet genererar även flera andra fördelar, exempelvis att doktoranderna får större vana att presentera och värdera sina resultat och att de i högre grad kommer i kontakt med andra forskare både i sin närhet och internationellt. Dessutom visar det sig att med denna modell söker sig kvinnor i högre grad till och fullföljer högre studier i matematik, vilket är ovanligt i Sverige.

7. Kriterier för kvalitet i forskningen och etiska frågor

Denna studie inleddes ursprungligen som en del av ett lokalt utvecklingsarbete för att förbättra matematikundervisningen. Tomas och jag formulerade ett antal frågeställningar kring vårt dagliga arbete med eleverna utifrån ett rent professionellt intresse av att bli bättre lärare. Våra frågor var en reaktion på ett problem, nämligen att olika debattörer påstod att matematikkunskaperna hos avgångsstudenterna från gymnasiet de senaste åren blivit allt sämre och att felet fanns att söka i undervisningen i matematik inom grundskola och gymnasium. Från början tror jag inte att vi direkt betecknade vår undersökning som ”forskning”, men efterhand kom vi att mer och mer inrikta oss på att det var det vi faktiskt bedrev.

Hart (1998) relaterar en lista med *minimikrav* för vad som kan kallas ”forskning”, som togs fram vid PME 1989. Forskning kan bedrivas med en rad metoder eller perspektiv, men:

> *Within all these methods and approaches, one could insist that research be disciplined inquiry in response to a problem or question. The list of essential and minimum criteria for this disciplined inquiry was:*
> 1. *There is a problem.*
> 2. *There is evidence/data.*
> 3. *The work can be replicated.*
> 4. *The work is reported.*
> 5. *There is a theory.* (s. 411)

Uppfyllde då vår studie dessa minimikrav? Vi hade ett problem, som vi tänkte skaffa data kring för att sedan rapportera våra resultat. Undersökningen var (i princip) möjlig att upprepa, och vi byggde på konstruktivistiska teorier. Svaret måste bli ett ja, med vissa ytterligare kvalitetsvillkor.

Kriterier för kvalitet i forskningen

Finns det egentligen en allmänt vedertagen ”checklista” för vad som är kvalitetskriterier för forskning kring matematikundervisning? Zan (1999) sammanställer vad några forskare har angivit som viktiga kriterier. Den innehåller ett antal egenskaper som objektivitet, validitet, generalitet, relevans, koherens, kompetens, etik, originalitet, specificitet, sammanhang, falsifierbarhet, replikerbarhet, tillförlitlighet och multipla beviskällor. De enda tre kriterier, som samtliga var överens om var: *relevans*, *validitet* och *replikerbarhet*. Men dessa tre måste kompletteras med ytterligare några för att kunna bli täckande för vad kvalitet innebär.

Lester och Lambdin (1998) tar upp sex huvudpunkter:

Worthwhileness: Benämns av andra forskare exempelvis med ”*utility*” eller ”*relevance*”. Resultaten av en studie måste vara av *någon* betydelse för att utöka eller fördjupa vår förståelse av matematikundervisning, annars saknar den intresse och är i grunden meningslös.

Coherence: Brukas vanligen benämnas *validitet* (”*validity*”). De metoder och analystekniker, som används i studien, måste vara så utformade att de verkligen ska kunna ge svar på forskningsfrågorna. Man kan skilja på *inre validitet*, som handlar om kopplingen mellan teori och empiri i själva studien, och *yttre validitet*, som är hela studiens förankring i den vetenskapliga kontexten (se Svenning, 1999, s. 60-63).

Competence: Forskaren måste ha en tillräckligt god utbildning i metoder, datainsamling, analystekniker, statistik m.m. samt veta hur slutsatser kan, och får, dras utifrån de resultat som nås i studien.

Openness: *Transparens* eller *genomskinlighet* i forskningsprocessen har blivit ett allt betydelsefullare kriterium. Den består av två skilda delar: För det första måste forskaren vara medveten om sina personliga antaganden och förutfattade meningar och redovisa dem i rapporten. För det andra måste han beskriva sina forskningsmetoder och -tekniker samt hur data analyserats på ett sådant sätt att det blir helt klart för läsaren. Man skall, i princip, kunna upprepa undersökningen i minsta detalj.

Credibility: För att studien ska vara *trovärdig* måste den, förutom öppenhet, också innehålla diskussioner och slutsatser som bygger på data och bevis och inte enbart på allmänna resonemang. Presentationen ska också vara sådan att man kan bedöma hur välgrundade slutsatserna är. Resultaten ska vara tillförlitliga i så måtto, att om man genomför undersökningen en gång till med i stort sett samma förutsättningar, ska man få samma resultat. Detta är vad man menar med *reliabilitet* (”*reliability*”) (se Svenning, 1999, s. 63-65).

Ethics: De *etiska* frågorna kan också delas upp i två delar. Den ena är sättet som forskningen bedrivits på i förhållande till de personer som undersökts, exempelvis om och hur de givit sitt medgivande, hur sekretessen bevakats, om en rättvisande bild givits av dem etc. Det andra är att forskaren deklarerar vilka personer, som bidragit till studien på olika sätt, och vari dessa bidrag bestått. I det sista ingår också eventuella influenser från andra forskare till den aktuella studien.

Sowder (1998) delar upp de etiska problemen i dem som uppstår *på planeringsstadiet*, *under genomförandet* och *vid rapporteringen* av studien.

Redan i dess första kvalitetskriterium, att studien är värd att genomföra, ligger att det är oetiskt att slösa med människors tid genom att bedriva *onödig forskning*, även om det finns medel tillgängliga för den.

Respekten för personerna, som ingår i studien, gör att man måste få deras *medgivande*. Detta består av fyra moment: att deltagarna är fullt informerade, att de är kompetenta att ge sitt medgivande, att de helt förstår vad medgivandet innebär samt att de ger sitt medgivande frivilligt. När man forskar inom undervisning med, oftast, minderåriga barn, är samtliga fyra moment självklart svåra. Det är nödvändigt att få både elevers och föräldrars medgivande för att detta grundläggande etiska villkor ska anses vara uppfyllt.

Under genomförandet är det ytterst viktigt att man *undviker all typ av skada* man kan åsamka de undersökta personerna. Man måste behandla dem som subjekt och inte som objekt för studien. Tvärtom måste man söka efter och *maximera fördelarna*, och samtidigt vara medveten om att detta mål i vissa fall kan konkurrera med det första. Sådana fördelar kan bestå i att deltagarna just på grund av undersökningen får extra uppmärksamhet, får möjlighet till metakognitivt tänkande och uppnår kunskaper de annars inte skulle ha fått. Som forskare måste man vara uppmärksam på att dessa fördelar kan inverka på resultaten. Detta problem blir särskilt tydligt när forskaren samtidigt är lärare till eleverna, vilket diskuteras i nästa avsnitt.

De svåraste etiska problemen uppstår vid analysen och tolkningen av resultaten. Här är den ovan nämnda *transparensen* av yttersta vikt. Forskaren måste redovisa sina egna värderingar och utgångspunkter så hederligt som möjligt. Ändå kan det finnas omedvetna ställningstaganden, t.ex. av filosofisk, ontologisk, epistemologisk eller annan art, som insamlade data i studien filtreras genom. Kanske man rent av utesluter data, som inte stämmer med dessa ställningstaganden. Om studien är transparent, har andra forskare möjlighet att upptäcka eventuella felslut, som uppkommit genom sådan påverkan.

Det insamlade materialet måste behandlas *konfidentiellt*, i synnerhet om det innehåller känsliga data. De undersökta personerna måste kunna lita till full *anonymitet* vid publiceringen av resultaten, men detta är inte alltid så självklart lätt att uppnå. Om man exempelvis gör en undersökning i en egen klass och sedan publicerar resultaten i sitt eget namn, kan det vara relativt lätt för utomstående att lista ut vilka eleverna ifråga är. Har man citerat enskilda elever, kan man kanske rentav lösa upp anonymiteten på individnivå. Här kan det bli ytterst besvärliga avväganden mellan detta etiska krav och nyttan av att publicera rapporten i ett kanske angeläget syfte.

Ett etiskt problem, som också kan uppstå vid publiceringen, har att göra med *vem som betalar* för studien. Man har kanske fått pengar av någon för att utföra undersökningen som ett uppdrag. Kanske har denne ”någon” ett intresse av att studien ger ett resultat i en viss riktning, och om det artar sig väl kan ”han” tänka sig att anslå mer pengar. Detta kan bli ett stort dilemma för forskaren. Om han/hon rapporterar ”fel”, ställs forskningen inom området kanske in, och det finns rentav risken att mista arbetet.

Läraren som forskare

Det är allmänt känt att olika forskningsrön inom matematikdidaktik har svårt att nå ut till de på fältet verksamma lärarna. I ännu lägre grad får resultaten från forskningen någon genomslagskraft i form av reella förändringar av undervisningen. Madsén (2002) pekar på nödvändigheten av, men också riskerna med, ett ökat forskningsutnyttjande. Han menar att lärarna i mycket större utsträckning behöver bygga sin verksamhet på forskningsrön, men att det lätt kan bli så att dessa misstolkas eller används på ett ytligt sätt av lärarna.

Lester (2002) förklarar de problem, som forskaren ser vad det gäller att nå fram till lärarna på fältet:

> *Among the many explanations proposed for the failure of our research to resonate with teachers, one that has not been given adequate attention by mathematics educators, is that researchers and teachers have different ways of validating what they know and believe about mathematics teaching and learning. They also accept different ways to frame their discourse about what they know and believe.* (s. 490)

Han relaterar också, från en bok av Glaser, Abelson och Garrison (1983), fyra skillnader mellan forskare och lärare:

1. *A tendency to live in two different professional communities.*
2. *Distinctive cognitive styles.*
3. *Responsiveness to divergent rewards.*
4. *Different beliefs about how knowledge can best contribute to human welfare.*

Wheeler (1989) skriver på samma sätt:

The separation of researchers from practitioners, and of theory from practice, is common to most professional activity in many societies. The structure of academic institutions, which distinguish "pure" and "applied" science, and institutionalized differential career opportunities, reinforce the separation. In education the gap is particularly wide and distressing. This is not so much because teachers do not want technical help, nor because researchers would not be able to supply it, but because each group is embedded in a different situation with its own goals, responsibilities and rewards. Researchers are not recognized by the extent to which their work proves useful to teachers, nor are teachers recognized by the extent to which they are informed about and use the latest research.
(s. 278)

Problemen med förståelse mellan de två grupperna måste på något sätt lösas. En forskning, vars resultat inte kommer till någon verklig användning, kan man allvarligt ifrågasätta. Samtidigt ska undervisningen enligt styrdokumenten ske på "vetenskaplig grund", vilket nödvändiggör att forskningsrön ständigt förs in.

Lester (2002) diskuterar en möjlig modell för hur forskare och lärare kan mötas för att förbättra utbytet av erfarenheter, såväl praktiska som vetenskapliga, och därigenom skapa en fruktbar utveckling av undervisningen. I modellen ingår skapandet av nätverk på olika nivåer, i vilka ingår forskare, lärare, lärarutbildare, skoladministratörer m.fl. En liknande tanke förs fram i *Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens* (Utbildningsdepartementet, 2004). Man måste dock vara klar över att det finns vissa problem med kommunikationen "över gränserna". Madsén (2002) menar att man rentav måste utveckla en speciell yrkesgrupp, "forskningsmedierare", men jag anser istället att det måste ligga närmare till hands att utnyttja den kompetens våra lärarutbildningar redan har.

En annan modell för att närma forskning och undervisning till varandra är den som benämns *aktionsforskning*. Inom sådan är det normalt så, att en forskare eller forskargrupp samarbetar med lärare på fältet, som man knutit till sig. Tanken är att det ska utvecklas ett symbiotiskt förhållande, i vilket forskaren får möjlighet att samla in data från fältet, samtidigt som läraren utvecklar sin egen professionella kompetens. Detta sätt att arbeta kan många gånger bli väldigt lyckat (se t.ex. Raymond & Leinenbach, 2000), men det kan även innebära vissa svårigheter. Exempelvis kan jämvikten i samarbetet få slagsida om forskaren blir alltför dominerande. Läraren kan till och med känna sig utnyttjad, snarare än att han/hon får möjlighet att utveckla sig. Sådana svårigheter måste man noga diskutera innan man går in i en aktionsforskning.

För att slutgiltigt knyta samman forskning och undervisning finns ännu en möjlighet:

> *Kanhända är lösningen för att överbrygga gapet mellan teori och praktik att läraren, praktikern själv, blir forskare och den som ställer frågorna och utför undersökningarna som har relevans för praktiken.*
> (Grevholm, 2001, s. 257)

Grevholm diskuterar även kriterierna för när en lärare blir forskare:

> *I ett försök att precisera vad jag menar med läraren som forskare vill jag säga att det även krävs att läraren försöker på ett systematiskt sätt finna svar på sina frågor genom att relatera förklaringsmodeller som har sin grund i teorier till egna strukturerade försök i klassrummet. Resultaten bör granskas kritiskt och utsättas för diskussion samt publiceras innan vi kan betrakta arbetet som forskning.*
> (Grevholm, 2001, s. 258)

Detta stämmer väl med det Hart (1998) framhåller som baskriterier för forskning. Frågan är om man i det här sammanhanget kan använda termen "aktionsforskning"? Madsén (2002, s. 19) menar att man bör reservera denna term för det mera strikta arbete, som genomförs av specialutbildade forskare, och föredrar istället benämningen "aktionslärande". Grevholm relaterar en artikel av Jaworski (1998) kring en studie, i vilken forskare vid universitetet samverkar med lärare som genomför forskning inom områden de själva valt. Grevholm skriver:

> *Den teori som skymtar fram om lärarnas forskningsaktivitet samstämmer väl med synen på aktionsforskning relaterat till kritiskt reflekterande praktik. Lärarna sågs som reflekterande praktiker som utvecklade kunskaper och medvetenhet genom fördjupad metakognitiv aktivitet.* (Grevholm, 2001, s. 259)

Avgörande för att resultaten av praktikerforskningen ska få tillräcklig status för att dess resultat ska tas på allvar, är att den genomförs med tillräcklig kvalitet enligt kriterierna i föregående avsnitt. Ett av kriterierna var forskarens *kompetens*, inkluderande teoriutbildning inom t.ex. didaktik och epistemologi, kunskaper om metoder, skriftlig förmåga etc. I Matematikdelegationens handlingsplan (se Utbildningsdepartementet, 2004) ingår såväl kompetensutveckling för nu verksamma lärare som en satsning på forskarutbildade lärare i framtiden. Redan nu finns forskningsperspektivet på ett tydligare sätt inskrivet i målen för den nya lärarutbildningen. Det som i framtiden framför allt kan lägga hinder i vägen för en verksamhetsnära didaktikforskning är snarare tidsutrymmet. Det var exempelvis först genom de medel, vi erhöll från Skolverket och från Gudrun Malmers Stiftelse, som jag och Tomas fick egentlig möjlighet att bedriva forskning.

Fördelarna för läraren som forskare är många. Boero, Dapueto och Parenti (1996) beskriver några:

> *...teachers overcome the individualistic, 'isolationist' idea of their profession and learn to cooperate with one another. They learn to use both research tools and results to plan, observe and evaluate their classroom work. They learn to take some distance from their classroom experience and to profit from other people's experience.* (s. 1112)

Även Crawford och Adler (1996) framhåller vikten av att lärare får tillfälle att upptäcka, undersöka, reflektera, lösa problem och svara på egna forskningsfrågor:

> *Only through active engagement with problems and questions that are personally meaningful to them will they develop a rationale for action. Only through understanding their own learning through research, inquiry, investigation, and analysis will they come to understand such processes among students in their care.* (s. 1201)

Just den direkta användbarheten av forskningsresultaten i det dagliga undervisningsarbetet är av stor betydelse:

> *Unlike traditional forms of teacher education in preservice or inservice courses, learning through research results in knowledge that is actionable – a basis for professional action.*
> (Crawford & Adler, 1996, s. 1202)

Som jag ovan på flera ställen framhållit, var detta den kanske största drivfjädern för Tomas och mig för att påbörja den här studien. Vi hoppades på konkreta resultat som vi genast kunde omsätta i handling. Detta blev också utfallet på flera skilda sätt (se kap.5).

Finns det då inga problem med att samtidigt vara lärare och forskare? Hatch och Shiu (1998) diskuterar några av de förutsättningar för forskningens kvalitet man särskilt måste observera. Ett påtagligt problem är *objektiviteten*. När man befinner sig mitt i en undervisningssituation är det man observerar på olika sätt färgat av rollen som lärare. Hur ska man kunna "ta ett steg tillbaka" för att kunna betrakta processerna med opåverkade ögon (Hatch och Shiu kallar detta "*distancing*")? Nödvändigt är att med olika medel dokumentera vad som händer, med anteckningar, sparade arbeten, inspelade intervjuer eller videor. Läraren har sedan möjlighet att bearbeta dessa ”yttre” data med mera objektiva metoder. Dessa data tjänar naturligtvis också som granskningsunderlag för andra personers bedömning av resultaten av forskningen.

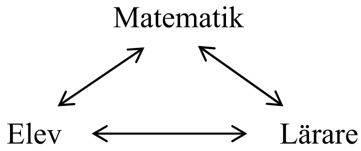
Hatch och Shiu anger tre möjliga steg för validering av lärarforskning (se s. 309). Först undersöker läraren själv sitt arbete med avseende på validitet. Därefter diskuterar han/hon sina upptäckter och slutsatser med andra lärare, forskare m.fl., vilka utgör en referensgrupp som kan bedöma om resultaten är rimliga och i samklang med vad man vet inom området (”peer validation”). Slutligen, genom att publicera resultaten, utsätts de för en kritisk granskning i en mycket vidare krets och kan jämföras med andra studier.

De *etiska övervägandena* blir för lärarforskaren extra viktiga och även betydligt oftare förekommande. I själva verket utsätts man för dem vid varje undervisningstillfälle, även om man inte speciellt tänker på dem jämnt. Det kommer tillfällen då rollen som lärare konkurrerar med den som forskare. Om någon elev har stora svårigheter med ett problem som han/hon inte kan lösa, ska man då lämna denna att kämpa med problemet för att kunna observera vad som händer som forskare, eller ska man ingripa med förklarande undervisning som lärare? Jag menar att man i det läget naturligtvis prioriterar ett sådant akut undervisningsbehov och lägger forskarrollen lite åt sidan. Man måste dock vara observant på vad som inträffat om man sedan analyserar problemlösningsprocessen.

Ett annat etiskt problem, som är större för lärarforskaren än för andra forskare, inträffar vid *publiceringen* av resultaten. Sekretessen är ofta mycket svårare att hålla när det framgår att det är en viss lärare som gjort undersökningen. Det blotta faktum att eleverna vet att det de säger eller skriver kan bli publicerat blir i värsta fall också ett hinder för undervisningen. Man måste som lärarforskare vara mycket medveten om de för- resp. nackdelar som finns med denna typ av forskning och, om det finns en konflikt mellan intressena, alltid ta elevernas parti. Den gode lärarforskaren ser till att fördelarna för eleverna med att vara föremål för en verksamhetsnära forskning är minst lika stora som nackdelarna.

Studiens kvalitet

Strässer (2003) diskuterar forskning inom matematikdidaktik, speciellt sett ur ett nordiskt perspektiv. Han utgår från den ”didaktiska triangeln”, som beskriver relationerna mellan människorna och matematiken i undervisningen:



Den didaktiska forskningen kan grovt indelas i sådana huvudtyper, som undersöker en av dessa eller möjligen en kombination av dessa relationer. Dessutom tillkommer inriktningar som exempelvis vilket område inom matematiken, vilken psykologisk, social eller kulturell aspekt man har, pedagogisk och epistemologisk grundsyn, etc. Strässer redogör också för de 28 huvudkategorier forskningen inom matematikdidaktiken delas in i vid de årliga PME-konferenserna (International Study Group Psychology of Mathematics Education), och som ger en god sammanfattning av fältet.

Vår egen studie innehåller element från alla tre relationerna i den didaktiska triangeln. Huvudinriktningen var visserligen elevernas algebralärande, alltså relationen mellan elev och matematik. Men under studiens gång har de övriga relationerna naturligt gjort sig påminda. Vi har t.ex. sett på de affektiva faktorerna och på undervisningsmetoderna (relationen elev och lärare) och på våra egna sätt att se på matematik och matematikundervisning (relationen lärare och matematik). Av forskningens 28 huvudkategorier kan studien främst placeras inom *Algebra*, men delar av den också inom *Affective Factors* och *Beliefs* samt, i mindre mån, även inom ett par av de övriga.

Björkqvist (2003) gör en genomgång av olika forskningsparadigm, varav denna studie faller inom kategorin *Forskning som genomförs av praktiker*. Han listar även de vanligaste ämnena för matematikdidaktisk forskning i Sverige (se s. 36-37). Algebra nämns inte, men möjligen kan delar av studien ligga nära punkten *Symbolkänsla och förståelse av matematiskt språk*. Klart är dock att relativt lite forskning för närvarande ägnas åt algebra i Sverige, varför denna studie förhoppningsvis kan anses fylla en brist.

Lester och Lambdins (1998) första huvudkriterium för kvalitet i forskningen var just ”*worthwhileness*”, att studien verkligen är relevant och av intresse för vår förståelse av matematikundervisningen. För Tomas och min del var detta i högsta grad fallet. Både själva forskningsprocessen och de resultat vi fick fram utvecklade oss påtagligt som lärare på flera plan. Vår förståelse för hela lärandeprocessen, för de speciella problemen med algebra, för eleverna och oss själva som människor, ökade på ett dramatiskt sätt genom vårt arbete med studien. Det är också vår intention att slutsatserna och rekommendationerna, som ges i rapporterna och i avhandlingen, ska kunna utnyttjas av andra lärare, lärarutbildare, forskare m.fl. och inspirera till fortsatt utveckling av undervisningen. Om detta blir fallet, måste man konstatera att relevanskriteriet blivit väl uppfyllt.

Det andra kriteriet, ”*coherence*” eller *validitet*, som ifrågasätter om undersökningsmetoderna verkligen är utformade så att de kan ge svar på frågorna, är delvis svårare att bekräfta. Studien avser att kartlägga de faktorer, som påverkar algebralärandet hos gymnasieelever från det naturvetenskapliga programmet generellt. De elever som faktiskt har undersökts, kommer enbart från Klippans Gymnasieskola, med ett upptagningsområde som huvudsakligen består av småorter och landsbygd. Andelen elever med annan etnisk bakgrund än svensk är förhållandevis liten (< 10 %). Det är också tämligen små populationer som undersökts, i storleksordningen 100 elever i vardera gruppen. Frågan, som måste ställas, är hur mycket det går att *generalisera* resultaten till att t.ex. gälla undervisningen i hela Sverige?

I våra undersökningar har vi medvetet valt att använda flera metoder parallellt, såväl kvantitativa som kvalitativa. Svenning (1999) benämner detta *metodtriangulering*, vilket innebär att metodgränser överskrids, hårddata blandas med mjukdata, surveyundersökningar kombineras med observationer, m.m. Genom att man på detta sätt ringar in frågeställningarna från flera olika håll ökar tillförlitligheten om samma eller liknande resultat kommer ur de skilda metoderna. I våra rapporter har vi exempelvis beräknat relativa lösningsfrekvenser för testuppgifterna, men vi är mycket försiktiga med att använda dessa mycket osäkra mått i slutsatserna. Snarare har vi försökt upptäcka tendenser eller speciellt uppseendeväckande resultat bland våra data. I viss mån har alltså även våra kvantitativa data behandlats på ett kvalitativt sätt.

Jag menar att vi i vår studie tillgodosett såväl den *inre validiteten*, i form av planeringen och genomförandet av de olika delarna med skilda designer, som den *yttre validiteten*, med möjligheten att generalisera och koppla till teorier och andra undersökningar. Det finns vissa frågetecken kring generaliserbarheten, men den kvalitativa karaktären hos studien och dess mångsidighet gör, att resultaten och slutsatserna bör vara relevanta även i ett vidare sammanhang. Niss (2001) beskriver tre förhållningssätt till matematikdidaktisk forskning, varav ett är att:

> *...ämnet kan tillhandahålla inträngande och upplysande studier av enskilda fall eller situationer, som inte behöver vara generaliserbara och som därför inte bör uppfattas som i klassisk bemärkelse vetenskapliga resultat, men som ändå är innehållsrika och stimulerande för tanke och handling.* (s.31)

Det handlar alltså mera om att påvisa *existensen* av vissa fenomen än att bevisa att dessa är generella.

Det tredje kriteriet, ”*competence*”, var vid studiens inledning inte fullt tillgodosett. Tomas hade genomgått forskarutbildning i teoretisk fysik, men ingen av oss hade någon egentlig utbildning inom matematikdidaktik. Vi kom dock tämligen snabbt, bl.a. genom den kompetensutveckling vi genomgick och som beskrivits i kap.1, att få de grundläggande kunskaper inom epistemologi, didaktik, metodologi etc. som var nödvändiga för att vi skulle kunna bedriva forskning inom matematikdidaktiken. För min egen del har dessa kunskaper sedan efterhand byggts på med vetenskapsteori, ytterligare metodologi, skrivteknik osv. Självfallet har även kunskaper inom det speciella matematikdidaktiska området ”Algebra” hela tiden utgjort en nödvändig grund för och bakgrund till de undersökningsmetoder och testfrågor vi använt oss av. I takt med våra ökade kunskaper om t.ex. olika teorier om algebralärande, har vi också kunnat konstatera hur vi haft möjlighet att förbättra och förfina våra metoder. Man läser med större djup då man aktivt söker svar.

Fjärde kriteriet, ”*openness*”, gäller hur öppen eller transparent studien är. I redovisningen av metoder och resultat har jag försökt att tillräckligt detaljerat skildra hur vi valt våra metoder, hur vi gått väga vid undersökningen, hur vi analyserat resultaten, på vilka grunder vi dragit slutsatserna och vika teorier vi baserat arbetet på. Så hederligt jag har förmått har jag också redovisat mina egna ståndpunkter, eventuella förutfattade meningar och personliga antaganden, även då dessa under studiens gång ändrats på vissa punkter. Ett tydlig sådan förändring var exempelvis min ökande insikt om de affektiva faktorernas mycket stora inverkan på studieresultaten.

Trovärdighet, eller ”*credibility*”, är det femte kvalitetskriteriet. I princip allt datamaterial som insamlades under studien finns sparat, och det bör vara möjligt att vid behov gå igenom det på nytt. Ljudbanden från intervjuerna är möjligen nu av alltför dålig kvalitet, men transkriptionerna finns kvar. Samtliga test- och enkätsvar finns också tillgängliga om man skulle vilja bearbeta dem på nytt. T.ex. skulle man kunna göra en mer omfattande kategorisering av vissa öppna frågesvar, såsom förklaringarna till sambandet $y = x + 5$.

I *reliabiliteten* ligger också att våra analyser och resonemang utförts på ett logiskt och trovärdigt sätt samt att slutsatserna verkligen bör kunna dras utifrån tillgängliga data. Detta har varit en allvarlig strävan för oss att uppnå, och jag menar även att vi lyckats med den avsikten. Ett viktigt faktum, som verkar sänkande för reliabiliteten, är dock att studien i så stor utsträckning förlitar sig till kvalitativa data, som ju är mer exemplifierande än generaliserande. Om studien gjordes om med en annan grupp elever, skulle kanske testresultat kunna utfalla på liknande sätt, medan svaren på de öppna frågorna eller fallstudierna eventuellt kunde te sig lite annorlunda.

Det sjätte och sista kriteriet, ”*ethics*”, är inte minst viktigt för vad som kan kallas god forskning. Utan våra elevers medverkan skulle den här studien inte kunnat genomföras, och det är närmast en självklarhet att vi både har behandlat och fortfarande behandlar dem med största möjliga respekt.

När vi planerade vår studie, måste vi först se till att vi hade *medgivande* både från elever och föräldrar, det sista eftersom eleverna samtliga var minderåriga. Vi startade med en första diskussion under en lektion, då syftet med undersökningen och exakt vad vi ville att eleverna skulle hjälpa till med förklarades. Därefter togs frågan upp som en huvudpunkt vid föräldramötet, som hölls redan i september under den första terminen. Samtliga föräldrar och samtliga elever gav då sitt godkännande för det vi tänkte genomföra. Det fanns också full möjlighet för en enskild elev att när som helst berätta för oss att hon/han inte längre ville delta. Vi poängterade särskilt att detta på intet sätt skulle påverka elevens resultat i matematik. På samma sätt var vi varsamma med att inte sammanblanda våra tester med provresultat, vilket eleverna noga informerades om. Ett ”konstigt” svar på testet eller i enkäten fick inte påverka exempelvis betygen negativt. Detta var viktigt för att sådana kopplingar inte skulle verka hämmande på samarbetsviljan.

Naturligtvis diskuterade vi elevernas testresultat med var och en, och resultaten kunde på så sätt utgöra grunden för en formativ bedömning, som styrde fortsatt undervisning. Vi fick med vår undersökning mycket bättre instrument för en individuell planering än vi normalt haft tillgång till. Detta var ett av de sätt, på vilka vi ville att våra elever också skulle få skörda *fördelar med att medverka i en aktionsforskning*, och inte bara behöva genomgå jobbiga tester och intervjuer. Under diskussionerna kunde vi också ställa tilläggsfrågor till elevsvaren för att se om vi uppfattat dem så som eleverna tänkt. På så sätt försökte vi ge en så *rättvisande bild* som möjligt av eleverna och deras tankegångar.

Som diskuterats i föregående avsnitt är *sekretessen* extra besvärlig att upprätthålla när forskaren samtidigt är lärare. Vi utförde våra undersökningar på en enda skola, med ett begränsat antal lärare inblandade. Det är fullt möjligt att ta reda på vilka klasser, och därmed elever, som deltog. Däremot bör det vara svårt att, utifrån våra rapporter, peka ut vad enskilda individer sagt eller skrivit. I den mest personliga delen, fallstudierna i rapport III, har vi benämnt eleverna med beteckningen A-K. Samtliga transkriptioner av intervjuerna är också försedda med en liknande personkod. Det finns en nyckel nedskriven för vilken elev, som döljer sig bakom respektive beteckning, men den förvaras inte tillsammans med materialet, och kan lätt förstöras vid behov. Testerna och enkäterna lagras nu på en plats, som inte är tillgänglig mer än för mig personligen. De kan fortfarande identifieras på ett individuellt plan, eftersom det skulle kunna tänkas att mer forskning kan göras på dem, men avsikten är att denna identifiering ska avlägsnas så snart den inte längre behövs. På sikt kommer även allt datamaterial att på lämpligt sätt destrueras.

Vid *publiceringen* av rapporterna, och även av denna avhandling, har tagits så stor hänsyn till anonymiteten hos eleverna som möjligt. Vi har genomgående undvikit att ta med alltför personligt avslöjande eller känsliga kommentarer, även om de skulle ha varit av intresse för resultaten. Dessbättre har det i våra data inte förekommit särskilt mycket som vi på detta sätt inte har kunnat använda, och det har inte påverkat någon av slutsatserna vi dragit.

Slutligen måste nämnas något om vår egen etik i förhållande till studien och de resultat och slutsatser vi rapporterat. En väsentlig del av vår undersökning bedrevs med hjälp av medel från Skolverket och Gudrun Malmers Stiftelse. För att få dessa medel, skrevs ansökningar med utförliga projektbeskrivningar. Men i dessa uttrycktes inget annat än de mål vi själva ställt upp, och vi har inte på minsta sätt känt oss tvingade att rapportera i en viss riktning eller med vissa ”glasögon” på. Vi har med andra ord ”ägt” vår undersökning fullt ut, och de tankar och slutsatser vi relaterar är enbart våra egna. Det känns heller inte som om vi ”rusat iväg” i någon ohejdad forskningsiver, så att vi i någon fas har glömt bort vilka kvalitetskrav som ställs för god forskning. Vid planeringen har vi tvärtom noggrant försökt gå igenom alla de viktiga och grundläggande forskningsfrågor vi kunnat förutse för att ge vår studie största möjliga kvalitet.

8. Förslag till fortsatt forskning

I en bred undersökning som denna, i vilken elevernas lärande studerats ur flera olika perspektiv, är huvudsyftet att kartlägga snarare än att gå på djupet med enskilda faktorer. Den insamlade datamängden växer mycket snabbt och många intressanta frågeställningar, som uppstår under forskningsprocessen, måste dessvärre förbigås. I själva verket är detta ett nödvändigt val, som måste göras för att inte studien ska svälla alltför mycket. En del av frågeställningarna är dock sådana att det vore önskvärt att de kunde leda till fortsatt forskning, men då en mera fokuserad sådan. Det finns då flera vägar att gå vidare, allt från surveyundersökningar, som involverar större populationer av elever och lärare, till kvalitativa djupundersökningar av speciella, för undervisningen kritiska, frågor.

Det finns en rad områden som studien inte fördjupat sig i eller bara ytligt gått in på. I vissa fall har resultaten varit av sådan karaktär att de lett till viktiga slutsatser, men de har också väckt nya frågor om lärande, som det vore av intresse att få besvarade. Ett par sådana områden, som studien tagit upp, är i grunden av allmän karaktär och gäller hela matematikämnet eller t.o.m. undervisning generellt.

Ett viktigt område för framtida forskning är betydelsen av de *affektiva faktorerna*. I Skolverkets kvalitetsgranskning, *Lusten att lära – med fokus på matematik* (Skolverket, 2003) framskymtar på många ställen hur viktiga dessa faktorer egentligen är. Det ges åtskilliga exempel på hur intresse, lust, självförtroende, gemenskap etc. är bärande förutsättningar för lärande, inte minst i ämnet matematik. Elever och lärare vittnar om hur skapandet av en god och positiv lärandemiljö också lett till framgångar vad gäller kunskaper och färdigheter. Vad som saknas är forskningsresultat, som skulle kunna verifiera detta och sätta fokus på ett av fundamenten för ”den goda skolan”. Speciellt i tider av ekonomisk tillbakagång med åtföljande resursnedskärningar är det viktigt att man inte glömmer bort människans affektiva behov (det gäller både elever och lärare), utan dessa måste ingå som en central del i exempelvis planer eller konsekvensbeskrivningar.

Ett annat viktigt område är *tidsanvändningen* i undervisningen. Hur effektiv är egentligen den tid, som avsätts för lärande? Kan man se skillnader mellan olika arbetssätt och pedagogiska metoder? Detta får inte förväxlas med de ”tidsstudier” som vid mitten av nittonhundratalet användes för att i detalj kartlägga varje moment i ett arbetsschema. Istället bör man se på helheter. Vad ägnas lektionstiden huvudsakligen åt och vilken tidsmässig tyngd har de olika delarna? Här finns det möjligheter att bygga vidare på exempelvis Stiegler och Hieberts (1999) forskning, som bedrivits kring hur lektioner utformas i olika länder. Man kan även tänka sig att se till elevens hela tid för lärande, inklusive den som är utanför lektionens ram. Här kommer bl.a. de viktiga frågorna om hur och varför läxor ges i matematik, om föräldrar som resurs för lärande m.m., in i bilden. Det finns mycket intressant gjort och skrivet kring detta, men tyvärr finns det inte mycket forskning gjord.

Huvudfokus för studien har trots allt varit elevernas algebralärande, och i det följande kommer några viktiga förslag till framtida forskning inom huvudområdet Algebra att presenteras. Inom något eller några av områdena har jag själv för avsikt att forska vidare.

Algebra från grunden

Under studiens gång, och även i det samarbete med lärare från olika skolstadier jag hade förmånen att få delta i, kom en hel del av mitt intresse att riktas mot vilken algebra eleverna mött i grundskolan. Särskilt intressant är hur den introducerats och med vilken tonvikt olika aspekter av den bearbetats i undervisningen.

Det finns exempel på försök att starta med algebra mycket tidigt, till och med innan eleverna fått möta aritmetik. I ett större projekt (”The Measure Up Project”), som leds av Dougherty m.fl. (se Dougherty & Zilliox, 2003), försöker man få svar på frågor som ”Påverkar traditionell aritmetik vissa barns förmåga att resonera algebraiskt?” och ”Hur utvecklas matematiskt lärande i en miljö med tidig algebra?”. I Sverige har många lärare vittnat om goda resultat när algebra i en lämplig kontext presenterats för, i vissa fall, små barn. Jag menar att det finns goda skäl att genomföra en vetenskaplig studie för att fastslå effekterna med en sådan förändring av hur matematikundervisningen bedrivs.

För en grupp elever, som tidigt möter algebra, måste undervisningen under hela återstoden av grundskolan kunna bli annorlunda. Detta kräver förändringar av läromedlen, anpassning till den nya situationen hos lärarna m.m., vilket implicerar ett *longitudinellt projekt*. I princip bör man följa eleverna under hela skoltiden, i varje fall under längre delar av den, för att få möjlighet att se de långsiktiga verkningarna. Vad betyder förändringarna för de senare åren i grundskolan? Kan man arbeta med nya eller förändrade områden inom algebran? Hur påverkar elevernas ändrade sätt att tänka andra matematikområden, som geometri etc.?

I de flesta studier kring algebralärande fokuseras mycket på hur och varför elever misslyckas. Man klassificerar exempelvis olika former av missförstånd av algebraiska begrepp eller hur förenklingar får göras. Denna studie är därvidlag inte något större undantag. Dock finns det ansatser att istället försöka se till varför elever egentligen *lyckas* med algebra, exempelvis i resonemangen kring de affektiva faktorerna. Jag menar att *det positiva perspektivet* ofta med fördel kan ersätta det negativa, och i en studie med tidigt införande av algebra bör det vara i förgrunden. Självklart ska man inte glömma bort de elever, som möter problem, men genom att studera dem som lyckas, kan man skaffa sig verktyg för att styra allas lärande mot framgång.

Språk och algebra

Det algebraiska språket kan betraktas som en mänsklig skapelse, som utvecklats för att underlätta en särskild typ av abstrakt tänkande. Att det verkligen rör sig om ett språk med alla dess möjligheter, men även svårigheter, har närmare utretts i kap.2. Som alla språk måste man lära sig dess symboler, syntax m.m., och därigenom uppstår en stor del av problemen med lärandet. Algebran utnyttjar symboler, och ett semiotiskt betraktelsesätt ligger nära till hands. När algebran introduceras, utnyttjar man ofta konkreta föremål för att mediera de grundläggande matematiska tankarna. Som mellanled för att dokumentera sina resultat, kan eleverna rita eller skriva symboler som ibland uppfinns av dem själva. Detta är exempel på *symboliska aktiviteter*, som får sin algebraiska fortsättning i övergången till den vedertagna användningen av bokstavssymboler. Det vore intressant att i en studie få sådana aktiviteter dokumenterade och analyserade, i synnerhet ”nyckelövergången” till den egentliga algebran.

Den nära kopplingen mellan det vi normalt kallar språk (svenska, engelska etc.) och matematiskt språk föranleder tankar på om det kan finnas vinster i att betrakta dem i ett sammanhang. Kan en tydlig fokus i undervisningen på *språkliga aspekter* befrämja elevernas förståelse av matematiska, i synnerhet algebraiska, uttryckssätt? Det finns en studie av MacGregor och Price (1999), som undersökt aspekter på språklig förmåga och algebralärande, men jag menar att detta vore av stort intresse att genomföra även i Sverige. Våra språkliga problem är kanske annorlunda än dem man har i engelsktalande länder? Är kanske många av de problem med matematikundervisningen, som upplevs av elever med annan etnisk bakgrund än svensk, i grunden språkliga? Skolan söker kanske samband mellan algebran och svenska språket, medan dessa elevers egna språkliga bakgrunder inte tillåts påverka kopplingarna förrän i andra hand? Med de tillkortakommanden, som dessvärre på senare tid påvisats i svensk skolas matematikundervisning för elever med invandrarbakgrund, bör sådana forskningsfrågor vara ytterst angelägna.

Undervisning om algebra

En viktig forskningsaspekt på algebra är hur undervisningen bedrivs i klassrummet. Björkqvist (2003) noterar i sin översikt över matematikdidaktisk forskning att det i Sverige inte finns något *"tydligt tecken på forskning som gäller "hur-komponenenten" i matematikdidaktiken, speciellt för situationer som handlar om typiska stora klasser med heterogen elevsammansättning"* (s. 36). Vilka aspekter på algebra kan och bör presenteras, främjas och betonas?

Det finns flera intressanta frågeställningar, som är möjliga att bygga forskning på. Till exempel kan man undersöka *integrationen mellan algebra och andra områden*, som aritmetik, geometri eller statistik, eller mellan algebra och andra ämnen, som fysik, samhällskunskap m.fl. Eller kan man vara intresserad av vilka *verktyg* (geometriska bilder, tabeller, grafer), som hjälper eleverna att förstå det mer kraftfulla algebraiska sättet att tänka. Man kan se på hur eleverna möter algebraiska beteckningar i skilda *kontexter*, hur man resonerar utifrån olika *algebraiska former* och strategiskt manipulerar dem för att erhålla nya, användbara former.

Liksom när det gällde den tidiga algebran, som beskrivits ovan, finns det goda skäl att studera algebraundervisningen i ett *longitudinellt perspektiv*. Vilka pusselbitar till det "algebraiska begreppsbygget" kan eleverna få under sina år i skolan? Hur undviker man att leda in eleverna i *återvändgränder* tankemässigt? Här krävs givetvis ett långsiktigt samarbete mellan lärarna på olika nivåer enligt rekommendationerna i kapitel 6 (avsnittet "Samarbeta med matematiklärare över gränserna"), och detta viktiga samarbete bör studeras i direkt forskning.

Denna studie undersöker, enligt titeln, faktorer som påverkar gymnasieelevers algebralärande. Det ska dock understrykas att det enbart är elever från naturvetenskapligt och, senare, tekniskt program, som ingått i undersökningarna. Frågan är då vilken algebra, som undervisas om i *de övriga gymnasieprogrammen*? Kursplanen för Matematik A är mycket allmänt hållen och det gäller även algebran. Urvalet av algebramoment i undervisningen ska styras av vilket program eleverna tillhör, även om vissa grunder allmänt bör tas med. Viktiga forskningsfrågor är sådana som "Vilka algebramoment ingår de facto i matematikundervisningen på olika programmen?", "Vilka algebramoment är det *önskvärt* att man tar upp i de olika programmen?" eller "Hur klarar de elever som fortsätter med Matematik B-kursen sedan algebran i denna?".

Det vore även av stort intresse att få se en fortsättning på den forskning, som inletts av Olteanu (2003; Olteanu, Grevholm & Ottosson, 2003), och som fokuserar på "*hur elevernas algebraiska tänkande utvecklas, hur de rör sig från en uppfattning till en annan samt hur deras kunskaper, färdigheter och attityder till innehållet ändras."* Olteanu använder, liksom Stiegler och Hiebert gjort, tekniken med videoinspelningar av lektioner för att dokumentera vad som sker. Hon undersöker också lärarnas medvetenhet om sin egen undervisning och de uppfattningar om lärande som styr deras handlingar i klassrummet. Detta är en typ av forskning, som har utsikter att ses som verkligt nyttig av såväl forskare som på fältet verksamma lärare.

Räknarnas betydelse

Ett speciellt viktig kategori av verktyg för mediering av algebraiska tankar och begrepp utgörs av de olika typer av räknare, som används inom matematikundervisningen. I grundskolan har man till största delen enkla *aritmetiska räknare* eller, i de senare åren, *funktionsräknare*. Sannolikt förekommer *grafräknare* endast i ringa omfattning, även om inga uppgifter går att finna om hur frekventa de skilda typerna av räknare är i grundskolan. I ämnesplanen för matematik i grundskolan (Skolverket, 2000a) nämns bara att skolan ska sträva efter att eleven utvecklar sin förmåga att utnyttja "miniräknarens" möjligheter, en formulering som knappast är i takt med teknikens utveckling. Det vore av stort intresse att undersöka *hur räknare av alla kategorier används i grundskolan*. Specifikt kunde undervisningsexperiment utföras i vilka räknarna strategiskt används för att stärka den algebraiska förståelsen. Grafräknarna ger möjlighet till multirepresentationer av algebraiska samband, som formler, som tabeller samt som grafer. Detta bör eleverna med fördel kunna utnyttja under grundskolans senare år, åtminstone de som kommit långt i sin algebraiska utveckling.

En långsiktig, strategisk användning av grafräknare i grundskolans matematikundervisning kräver en omvärdering av hur olika moment med algebrainnehåll behandlas (se t.ex. Dalek, 2001; Kissane, 2001), och en studie av hur utfallet blir av en sådan kräver också en omorientering av lärarnas framställning av området. En sådan studie vore dock välmotiverad och skulle också kunna peka fram mot användningen av grafräknare i gymnasiets kurser.

Situationen i gymnasiets matematikundervisning är en helt annan, i det att användning av grafräknare föreskrivs inom samtliga kurser Matematik A-E. Eleverna ska till och med ha vana att använda dem. Redan i *Ämnets karaktär och uppbyggnad* i ämnesplanen står:

> *Tillgången till tekniska hjälpmedel har delvis förändrat matematikämnet. Såväl numeriska, grafiska som algebraiska metoder utnyttjas och nya typer av problem av mer sammansatt karaktär kan studeras i ämnet. De tekniska hjälpmedlen har dock begränsat värde utan kunskaper om begrepp och metoder. Förståelse, analys av hela lösningsprocedurer och kritisk granskning av resultat samt förmåga att dra slutsatser är grundläggande i gymnasieskolans matematikämne.*
> (Skolverket, 2000b)

Citatet innehåller olika didaktiska bedömningar, värderingar och målsättningar. Det skulle vara intressant att med nyare forskning undersöka i vilken mån detta har förverkligats. Har de tekniska hjälpmedlen förändrat matematikämnet och på vilka sätt i så fall? Klarar elever på exempelvis fordonsprogrammet att använda grafräknare inom exempelvis funktionslära utan att egentligen förstå hur man för hand löser problemen först? Används verkligen grafräknarna på det sätt som den sista meningen i stycket anger? Exemplen på frågor kan göras lång.

Ett par svenska forskare, som studerat gymnasieelevers användning av grafräknare är Bergqvist (se t.ex. Bergqvist, 2001) och Lingefjärd (1994). Deras studier är mest inriktade mot förståelse av funktioner och problemlösning, vilket är två av de algebraiska perspektiven. Här behövs en komplettering av forskning även av *hur grafräknarna kan stödja förståelsen* av exempelvis generaliseringar, algebraiska räkneregler, ekvationslösning, etc.

Frågan är hur man i verkligheten har handskats med grafräknarna ute på skolorna. Har man verkligen undervisat eleverna i deras användning på ett sådant sätt att de är *vana* att använda dem? I ämnesplanen och kursplanerna framhålls att grafräknarna inte bara ska användas som ett hjälpmedel för beräkningar, utan som ett övergripande, kognitivt verktyg (se citatet ovan). Om detta ska bli möjligt måste användningen av räknarna bygga på och interagera med en förståelse av algebra. Två för mig centrala forskningsfrågor är: *"Ökar en väl genomtänkt undervisning i användningen av grafritande räknare elevernas förståelse för algebraiska begrepp och samband?"* och *"Stärks elevernas förmåga att lösa algebraiska uppgifter med högre abstraktionsgrad genom de metoder som blir tillgängliga med de grafritande räknarna?"*

När det gäller de *symbolhanterande räknarna*, som nämns exemplevis i Matematik D-kursen, har väldigt lite forskning gjorts kring deras användning på gymnasienivå. Speciellt går det inte att finna någon sådan i Sverige. Här finns ytterligare ett stort och synnerligen intressant fält att utforska. Vad kommer en ökad användning av instrument, som kan klara stora delar av de mer rutinmässiga delarna av algebran, att betyda för exempelvis kraven på algebrafärdigheter? En intressant diskussion förs i en artikel av Herget, Heugl, Kutzler och Lehmann (2001), i vilken ett försök görs att skilja ut vilka räknefärdigheter elever bör kunna klara med resp. utan symbolhanterande hjälpmedel (CAS). Denna diskussion bör givetvis även föras inom svensk algebraforskning.

Det matematikdidaktiska fältet Algebra

När man genomför en studie med breda frågeställningar inom det matematikdidaktiska fältet *Algebra*, slås man av hur osammanhängande teorin för detta i grunden är. I själva verket får man nästan intryck av att det är flera skilda teorier, som bara löst sammanfogats, eller kanske snarare, sammanförts just för att de handlar om algebra. Till vissa delar har taxonomier konstruerats, men dessa tycks inte passa riktigt in i varandra, eller har skilda utgångspunkter (se t.ex. Quinlans nivåer resp. Küchemanns kategorier i kap.2). En del forskare sysselsätter sig med symbolism och språkliga effekter, andra med övergången aritmetik – algebra, åter andra med de olika perspektiven (problemlösning etc.) eller de medierare och verktyg som används. Det finns naturligt nog även de, som speciellt intresserar sig för människorna i lärandeprocessen och de psykologiska aspekterna, för lärarna och lärarutbildningen, läroplanernas innehåll och syften eller samhällets inställning till algebra.

Kieran (1992) gav i sin artikel ”*The Learning and Teaching of Algebra*” en översikt över forskningen inom algebrafältet. Hon sammanställde vad man då visste och placerade det i ett enkelt men grundläggande ramverk, strukturerat i huvuddelarna ”Learning”, ”Teaching” samt ”Content”. Hennes översikt över fältet är en utmärkt utgångspunkt för vidare teoristudier, och var en av de väsentligaste källorna till vetande om algebraundervisning jag själv utnyttjade i inledningen av denna studie. Dock är det uppenbart att det vid sammanställningen av olika forskningsrön varit svårt att förena en del synsätt på algebran som ofta varit tämligen disparata. Kieran har på en del ställen ett relaterande förhållningssätt och talar på något ställe om en evolution av algebradidaktiken.

Det har i sanning hänt mycket inom matematikdidaktiken sedan Kierans artikel skrevs, och inte minst synen på algebraundervisningen har på flera sätt ändrats. Kraven på kunnande, speciellt manuella färdigheter, har förändrats, bland annat i skenet av den teknologiska revolutionen vad gäller verktyg och hjälpmedel för matematiklärandet. Läromedel och, förhoppningsvis, undervisningsmetoder ser annorlunda ut idag jämfört med exempelvis den tidsperiod Kierans undersökning beskriver. Forskningsfältet Algebra har under denna tid knappast blivit mera koherent, utan ger snarare ett mera splittrat intryck. Stacey och Chick (2004) skriver i sitt inledningskapitel till *"The Future of the Teaching and Learning of Algebra"* att:

> *...the many examples scattered throughout the book demonstrate clearly that school algebra is a multi-faceted construction. There are many options for the appoaches, the problem domains, and the theoretical perspectives, and different decisions are taken in different places.* (s. 19)

Min avsikt är att konstruera *ett nytt ramverk för det matematikdidaktiska fältet Algebra*. Ramverket ska ta i beaktande samtliga aspekter på algebralärande, och ska gå att placera in i förhållande till gängse ontologiska, epistemologiska, pedagogiska, sociala och psykologiska modeller. "Teorin för algebraundervisning" ska utgå från de erfarenheter, som gjorts i den här studien, men även inkludera all relevant, nyare forskning inom området. Önskvärt är även att modellen är tämligen lättfattlig och användbar som utgångspunkt för vidare didaktiska studier för lärare eller som ett slags index för andra forskare inom algebrafältet.

"Teorin för algebraundervisning" ska också kunna utgöra ett underlag för lärarutbildning, för läroplansförfattande samt konstruktion av nationella utvärderingar och prov. När viktiga samhälleliga beslut ska fattas, som på något sätt berör algebraundervisning, vore det av stort värde om det existerade en slags handbok i "hur man undervisar i algebra". Detta är förmodligen ett svåruppnått ideal, som man inte desto mindre kan sträva mot.

Läraren som forskare

Det finns skäl att knyta an till det jag i föregående kapitel beskrev om "forskande lärare" och de stora fördelar som finns med en verksamhetsnära forskning bedriven av praktiker. Många av förslagen i de föregående avsnitten kan med fördel realiseras som *aktionsforskning*, antingen i sin klassiska form med högskolebaserade forskare i samarbete med erfarna lärare, eller genom att läraren själv blir forskare. Det senare skulle möjliggöras i högre utsträckning om Matematikdelegationens förslag till kompetensutveckling av verksamma lärare och en större satsning på forskning inom matematikdidaktik förverkligas (Utbildningsdepartementet, 2004). En viktig roll för om och hur didaktisk forskning bedrivs spelar naturligt nog även lärarutbildningarna. Här finns det stora möjligheter till synergieffekter mellan forskning, lärarutbildning och kompetensutveckling, som inte får förspillas.

När Tomas och jag påbörjade vår studie av algebralärande var vi på många sätt okunniga om vilka teorier om lärande och undervisning i algebra som kunde bilda bakgrund. Men våra undersökningar gjorde att vi kom i kontakt med forskningen inom området. Genom läsning av litteratur fick vi en ökad kunskap om lärandeprocesser och problemen kring dessa. Speciellt studerades området Algebra och vi blev då varse faktorer, som vi inte beaktat tillräckligt tidigare eller rentav inte tänkt på alls.

Att skriftligt dokumentera arbetet visade sig vara oerhört viktigt. Själva skrivprocessen bidrar till en fördjupad analys och reflektion över den egna undervisningen. Lärare lever till stor del i en talande kultur. Man diskuterar mycket med kolleger och om man skriver blir det oftast interna rapporter. Detta medför att mycket värdefull lärarkunskap sällan når utanför den egna skolan – ibland inte ens det egna klassrummet. Genom att lärares undersökningar, försök och reflektion över verksamheten dokumenteras skriftligt och sprids utanför den egna skolan i form av rapporter och artiklar, får fler inom utbildningssamhället ökad kunskap om inlärnings- och undervisningsprocesser. Detta gagnar utan tvekan verksamheten i våra skolor. Vi får troligtvis också en livligare debatt. Visserligen debatteras skolan mycket, men det är alltför sällan som man diskuterar fundamentala inlärnings- och undervisningsfrågor.

Så småningom kom vi också att definiera vårt utvecklingsarbete som verklig forskning. Avgörande för detta var att vi kunde notera hur våra nyvunna kunskaper inom didaktik och algebraundervisning gav oss betydligt kraftfullare instrument för att analysera våra forskningsresultat. Vi kunde också namnge det forskningsparadigm vi använde, nämligen ”aktionsforskning” i specialfallet ”läraren som forskare”. Att få möjlighet att undersöka vår egen undervisning såg vi som oerhört värdefullt, eftersom klassrumsforskningen gav nya perspektiv på den egna undervisningen och kunde hjälpa oss som lärare att förbättra vår praktik.

En annan nödvändig förutsättning var att vi fick tillräckliga resurser. För att lärare i sin skolvardag både skall kunna följa med aktuell forskning och bedriva egen forskning, är det nödvändigt att tid avsätts för detta. Utan det ekonomiska stöd vi fick från Gudrun Malmers stiftelse och från Skolverket hade vi knappast kunnat genomföra den här studien. Den nedsättning i våra tjänster som detta möjliggjorde var av avgörande betydelse. Det är även viktigt med stöd och förståelse från skolledningen. I vårt fall tycker vi att vi fick det, speciellt när de externa resurserna tagit slut.

För min egen del kom forskningen och den kompetensutveckling som åtföljde den att efter hand förändra mina livsmål. Jag hade som lärare en lång erfarenhet av undervisning, men nu hade jag också tillägnat mig redskap för att analysera den. I rapporteringen av forskningsresultat kunde jag nå ut till andra lärare med våra rön, men det fanns ännu ett möjligt steg att ta. Genom att bli lärarutbildare, kunde jag på ett direkt och praktiskt plan dela mina erfarenheter med våra blivande lärare, och göra dem medvetna om de viktiga matematikdidaktiska teorier, som bildar bakgrund till undervisningen. Jag fick dessutom väsentligt förbättrade möjligheter att fortsätta min forskning inom algebrafältet. Detta är den situation jag i skrivande stund befinner mig i.

Arbetet med studien har, eftersom det bedrivits med små resurser, tagit lång tid. Vid skrivandet av denna avhandling är det mer än sex år sedan undersökningarna, som ligger till grund för den, påbörjades. Mycket har under tiden hänt inom didaktikforskningen, och de ursprungliga frågeställningar vi startade med kanske idag kan betraktas utifrån nya perspektiv. Men det har varit en oerhört nyttig och utvecklande process att arbeta med studien, en process som alls inte avstannar för att denna sammanfattande avhandling skrivs. Studien ger också upphov till en rad nya forskningsfrågor och uppslag till hur man kan gå vidare. Det är min förhoppning att åtminstone några av dessa kan realiseras i den framtida forskningen inom fältet.

Slutligen vill jag än en gång understryka hur oerhört roligt det har varit att arbeta tillsammans med alla intresserade och kompetenta kollegor, med alla positiva och duktiga elever och med alla nyvunna bekantskaper, forskare och andra, inom matematikdidaktikens område. Naturligtvis har ni, som betytt allra mest för mig, Tomas Wennström och Barbro Grevholm, en alldeles speciell plats i mitt hjärta. Detta har varit en fantastisk upplevelse!

9. Referenser

Amerom, B. van (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics 54*, 63-75.

Arzarello, F., Bazzini, L. & Chiappini, G. (2001). A Model for Analyzing Algebraic Pocesses of Thinking. I R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (red.). *Perspectives on School Algebra*, s. 61-81. Dordrecht: Kluwer.

Artzt, A. & Newman, C. (1990). *How to use cooperative learning in the mathematics class.* NCTM "How to…" Series. Reston VA: NCTM.

Ausubel, D.P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view.* New York: Holt, Rinehart & Winston.

Balacheff, N. (2001). Symbolic Arithmetic vs. Algebra: The Core of a Didactical Dilemma. I R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (red.). *Perspectives on School Algebra*, s. 249-260. Dordrecht: Kluwer.

Bauerfeld, H. (1995). ”Language Games” in the Mathematics Classroom: Their Function and their Effects. I P. Cobb & H. Bauersfeld (red.), *The Emergence of Matematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Bauersfeld, H. (1998). Radikalkonstruktivism, interaktionism och matematikundervisning. I A. Engström (Red.), *Matematik och reflektion,* s. 54-81. Lund: Studentlitteratur.

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 3-12). Dordrecht: Kluwer.

Bergqvist, T. (2001). *To Explore and Verify in Mathematics*. Doktorsavhandling nr 21, 2001, Umeå universitet.

Björkqvist, O. (1993). Social konstruktivism som grund för matematikundervisning. *Nomad Vol.1*, No 1, s. 8-17.

Björkqvist, O. (2003). *Matematikdidaktiken i Sverige: En lägesbeskrivning av forskningen och utvecklingsarbetet.* Stockholm: Kungliga vetenskapsakademin.

Bloedy-Vinner, H. (2001). Beyond Unknowns and variables – Parameters and Dummy Variables in High School Algebra. I R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (red.). *Perspectives on School Algebra*, s.177-190. Dordrecht: Kluwer.

Blomhøj, M. (1997). Funktionsbegrebet og 9. klasse elevers begrebsforståelse. *Nomad 5*, nr 1, 7-31.

Boero, P., Dapueto, C. & Parenti, L. (1996). Didactics of Mathematics and the Professional Knowledge of Teachers. I A. J. Bishop et al (red.), *International Handbook of Mathematics Education,* s. 1097-1121. Dordrecht: Kluwer.

Brandell, L. (2002). *Matematikkunskaperna 2002 hos nybörjare på civilingenjörsprogrammen vid KTH – bearbetning av ett förkunskapstest*. Rapport, KTH, Stockholm.

Brekke, G. (2001). School algebra: Primarily manipulations of empty symbols on a piece of paper? I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, s. 96-102). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Brekke, G., Grønmo, L.S. & Rosén, B. (2000). *Veiledning til algebra.* Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Bruner, J.S. (1985). The Role of Interaction Formats in Language Acquisition. I J.P. Forgad (Red.), *Language and Social Situations*. Springer-Verlag: New York.

Crawford, A. (2001). Developing algebraic thinking: Past, present, and future. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, s. 192-198). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Crawford, K. & Adler, J. (1996). Teachers as Researchers in Mathematics Education. I A. J. Bishop et al (red.), *International Handbook of Mathematics Education,* s. 1187-1205. Dordrecht: Kluwer.

Dougherty, B. & Zilliox, J. (2003). Voyaging from theory to practice in teaching and learning: A view from Hawaii. I N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (red.), *Proceedings of the 27th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.1, 13-31). Honolulu, Hawaii: Program Committee.

Drouhard, J-Ph. & Teppo, A. (2004). Symbols and Language. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (red.) *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study,* s. 227-264. Dordrecht: Kluwer.

Ekenstam, A. & Greger, K. (1987). On children's understanding of elementary algebra. *Journal of Structural Learning 9,* 303-315.

Ekenstam, A. & Nilsson, M. (1979). A new approach to the assessment of children's mathematical competence. *Educational Studies in Mathematics 10*, 41-66.

Ernest, P. (1998). Vad är konstruktivism? I A. Engström (red.), *Matematik och reflektion,* s. 21-33. Lund: Studentlitteratur.

Feigenbaum, R. (2000). Algebra for Students with Learning Disabilities. *The Mathematics Teacher Vol.93, No.4*, 270-274.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing.* Dordrecht: D.Riedel Publishing Company.

Gallardo, A. (2001). Historical – Epistemological Analysis in Mathematics Education: Two Works in Didactics of Algebra. I R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (red.). *Perspectives on School Algebra*, s.121-139. Dordrecht: Kluwer.

Glaser, E. M., Abelson, H. H., & Garrison, K. N. (1983). *Putting Knowledge to Use: Facilitating the Diffusion of Knowledge and the Implementation of of Planned Change.* San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Glasersfeld, E. von (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. London: The Palmer Press.

Grevholm, B. (1998). Teacher students' development of concepts in mathematics and mathematics education. I Breiteig, T. & Brekke, G.(red), *Proceedings of Norma 98*, *the Second Nordic Conference on Mathematics Education*, s. 139-146 . Kristiansand: Agder College.

Grevholm, B. (2000). Research on student teachers' development of concepts in mathematics and mathematics education. I J. Lithner & H. Wallin (red.), *Nordic Research Workshop: Problem driven research in mathematics education,* Research reports in mathematics education No1, 2000, s. 87-95. Matematikinstitutionen, Umeå Universitet.

Grevholm, B. (2001). Läraren som forskare i matematikdidaktik. I B. Grevholm (red.). *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv,* s. 257-274. Lund: Studentlitteratur.

Grevholm, B. (2003). *Student teachers's conceptions of equalities and inequalities.* Paper presenterat vid Nordic Preconference to ICME 10, 9-11 maj, 2003. Växjö. URL http://www.msi.vxu.se/picme10/SEMINAR.htm.

Grevholm, B., Persson, L-E. & Wall, P. (2004). A Dynamic Model for Education of Doctoral Students and Guidance of Supervisors in Research Groups. Accepted for *Educational Studies of Mathematics, 2004.*

Grevholm, B. & Wennström, T. (1998). Samverkan högskola – skola. *Nämnaren 25(3)*, 30-31.

Grevholm, B. & Wennström, T. (1999). Samverkan högskola – skola II. *Nämnaren 26(4)*, 36-39.

Hansson, Ö. & Grevholm, B. (2003). Preservice teachers' conceptions about y=x+5. Do they see a function? I N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zilliox (red.) *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA*, vol 3, s. 25-32. Honolulu: Univerity of Hawaii.

Hart, K. (1998). Basic Criteria for Research in Mathematics Education. I A. Sierpinska & J. Kilpatrick (red.). *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity,* s. 409-413. Dordrecht: Kluwer.

Hatch, G. & Shiu, C. (1998). Practitioner Research and the Construction of Knowledge in Mathematics Education. I A. Sierpinska & J. Kilpatrick (red.). *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity,* s. 297-315. Dordrecht: Kluwer.

Herget, W., Heugl, H., Kutzler, B. & Lehmann, E. (2000). I vilken utsträckning behöver elever kunna räkna för hand när det finns datoralgebra. *Elementa 01*, nr 3, 116-124.

Högskoleverket (1999). *Räcker kunskaperna i matematik?* Stockholm: Högskoleverket.

Jacobsson-Åhl, T. (2003a). *Developing a framework for analyzing algebraic thinking*. Paper presenterat vid Nordic Preconference to ICME 10, 9-11 maj, 2003. Växjö. URL http://www.msi.vxu.se/picme10/SEMINAR.htm.

Jacobsson-Åhl, T. (2003b). *Analyzing algebraic thinking written solutions.* Paper presenterat vid Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. Bellaria, Italien. URL http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG6/TG6_list.html

Jaworski, B. (1998). Mathematics Teacher Research: Process, Practice and the Development of Teaching. *Journal of Teacher Education 1,* 3-31.

Kaput, J. (1999). Teaching and Learning a New Algebra. I E. Fennema & T. Romberg (red.) *Mathematics Classrooms that Promote Understanding* (s. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. I D.A. Grouws (red.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning, pp.390-419.* New York: Macmillan.

Kieran, C. & Yerushalmy, M. (2004). Research on the Role of Technological Environments in Algebra Learning and Teaching. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study,* s. 99-152. Dordrecht: Kluwer.

Kirschner, D. (2001). The Structural Algebra Option Revisited. I R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (red.). *Perspectives on School Algebra*, s. 83-98. Dordrecht: Kluwer.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School, 7(4),* 23-26.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.) *Children's understanding of mathematics: 11-16.* London: John Murray.

Lester, F. (2002). On the Purpose of Mathematics Education Research: Making Productive Contributions to Policy and Practice. I L. English (red.), *International Handbook of Research in Mathematics Education*, s. 489-506. Mahweh, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lester, F. & Lambdin, D. (1998). The Ship of Theseus and Other Metaphors for Thinking about What We Value in Mathematics Education Research. I A. Sierpinska & J. Kilpatrick (red.). *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity,* s. 415-425. Dordrecht: Kluwer.

Lingefjärd, T. (1994). The Role of the graphical calculator in learning mathematics. In *Report from The group of Advanced Mathematical Thinking*, PME 18, Lissabon, Portugal.

Lins, R. (2001a). The production of meaning for algebra: A perspective based on a theoretical model of semantic fields. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, s. 37-60). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Lins, R. (2001b). The Production of Meaning for Algebra: a Perspective Based on a Theoretical Model of Semantic Fields. I R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (red.). *Perspectives on School Algebra*, s. 37-60. Dordrecht: Kluwer.

Lins, R. & Kaput, J. (2004). The Early Development of Algebraic Reasoning: The Current State of the Field. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study,* s. 47-70. Dordrecht: Kluwer.

MacGregor, M. (2004). Goals and Content of an Algebra Curriculum for the Compulsory Years of Schooling. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study,* s. 311-328. Dordrecht: Kluwer.

MacGregor, M. & Price, E. (1999). An exploration of aspects of language proficiency and algebraic learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 30(4),* 449-467.

Madsén, T. (2002). Att bygga broar mellan skilda kontexter – perspektiv på popularisering av av forskning för lärare. I A. A. Thelin (red.) *Forskningen i Skolan/Skolan i Forskningen*, s. 11-25 . Dokumentation från forskningssymposium i Malmö. Stockholm: Skolverket.

Malmer, G. & Adler, B. (1996). *Matematiksvårigheter och dyslexi*, Lund: Studentlitteratur.

Mason, J. (1991). *Supporting primary mathematics: Algebra*. Milton Keynes, UK: Open University Press.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I N.Bednarz, C. Kieran & L. Lee (red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* , s. 65-86. Dordrecht: Kluwer.

Niss, M. (2001). Den matematikdidaktiska forskningens karaktär och status. I B. Grevholm (red.). *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv,* s. 21-47. Lund: Studentlitteratur.

Novak, J.D. (1998). *Learning, creating and using knowledge*. Mahwah, N.J.: Lawrence Earlbaum Associates.

Olteanu, C. (2000). Varför är skolalgebran svår? *Tsunami, nr 2/2003*. URL http://tsunami.hkr.se/

Olteanu, C. (2001). Vilka är elevernas svårigheter i algebra? *Tsunami, nr 3/2003*. URL http://tsunami.hkr.se/

Olteanu, C. (2003). *A developing study about algebra in upper secondary school*. Paper presenterat vid Nordic Preconference to ICME 10, 9-11 maj, 2003. Växjö. URL http://www.msi.vxu.se/picme10/SEMINAR.htm.

Olteanu, C., Grevholm, B. & Ottosson, T. (2003). *Algebra in upper secondary school – a study of teacher's teaching and student learning.* Paper presenterat vid Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. Bellaria, Italien. URL http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG6/TG6_list.html

Olteanu, C., Grevholm, B. & Ottosson, T. (2004). A Theoretical framework for Analysis of Teaching – Learning Processes in Algebra. I C. Bergsten, B. Grevholm, *Mathematics and Language, Proceedings of MADIF 4*, s. 203-211. Linköpings universitet: Linköping.

Pehkonen, E. (2001). Lärares och elevers uppfattningar som en dold faktor i matematikundervisningen. I B. Grevholm (red.). *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv,* s. 230-253. Lund: Studentlitteratur.

Persson, P-E (2002). Behöver alla lära sig algebra? *Nämnaren 29(3)*, 24-31.

Persson, P-E. (2003a). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse VI – tidsfaktorn.* Rapport, Högskolan Kristianstad.

Persson, P-E. (2003b). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse VII – tidsfaktorn.* Rapport, Högskolan Kristianstad.

Persson, P-E. (2004). *Den röda tråden – ett helhetsperspektiv på matematikundervisningen.* Dokumentation från Matematikbiennalen 2004. Malmö: Malmö Högskola.

Persson, P-E. & Wennström, T. (1999). Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse. *Tsunami, nr 1/2003*. URL http://tsunami.hkr.se

Persson, P-E. & Wennström, T. (2000a). Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse II. *Tsunami, nr 2/2003*. URL http://tsunami.hkr.se

Persson, P-E. & Wennström, T. (2000b). Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse III. *Tsunami, nr 3/2003.* URL http://tsunami.hkr.se

Persson, P. & Wennström, T. (2000c*). Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse IV. Tsunami, nr 1/2004*. URL http://tsunami.hkr.se

Persson, P-E. & Wennström, T. (2000d). Algebraisk förmåga och förståelse. *Nämnaren 27(2),* 55-61.

Persson, P-E. & Wennström, T. (2001). Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse V. *Tsunami, nr 2/2004.* URL http://tsunami.hkr.se

Persson, P-E. & Wennström, T. (2002). Algebraisk förmåga och förståelse, del 2. *Nämnaren 29(1),* 22–29.

Pettersson, A., Kjellström, K. & Björklund, L. (2001). Kompetensutveckling för lärare i matematik ur ett utvärderingsperspektiv. Bilaga till *Hög tid för matematik*, NCM-rapport 2001:1. Göteborg: nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Polya, G. (2004). *Problemlösning – en handbok i rationellt tänkande.* Stockholm: ePan. (ursprungligen utgiven 1957)

Quinlan, A. (1992). Levels of understanding of algebraic symbols and relationship with success on algebraic tasks. I A. Baturo & T. Cooper (red.) *New directions in algebra eduction*, s. 124-157. Red Hill, Qld: Centre for Mathematics and Science Education, Queensland University of Technology.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology, and the teaching of Mathematics: towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics 17(1)*, 26-33.

Raymond, A. & Leinenbach, M. (2000). Collaborative Action Research on the Learning and Teaching of Algebra: A Story of One Mathematics Teacher's Development. *Educational Studies in Mathematics 1*, 283-307.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical conceptions: Reflections on Processes and Objects as different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics 22*, 1-36.

Sfard, A. (1995). The Development of Algebra: Confronting Historical and Psychological Perspectives. *Journal of Mathematical behaviour 14*, 15-39.

Sfard, A. (2000). Steering (dis)course between metaphor and rigor: Using focal analysis to investigate the emergence of mathematical objects. *Journal for Research in Mathematics Education 31(3)*, 296-327.

Sfard, A. (2002). The interplay of intimations and implementations: Generating new discourse with new symbolic tools. *The Journal of Learning Sciences 11(2,3)*, 319-357.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The Gains and Pitfalls of Reification – The Case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics 26*, 191-228.

Sierpinska A. & Lerman, S. (1996). Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education. I A. Bishop et al (red.) *International handbook of mathematics education* (s. 827-876). Dordrecht: Kluwer.

Skolverket (1994). *Kursplaner 94, Naturvetenskapsprogrammet*, GyVux 1994:14. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2000a). *Grundskolan – Kursplaner och betygskriterier 2000*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2000b). *Skolverkets föreskrifter om kursplaner och betygskriterier för kurser i ämnet matematik i gymnasieskolan*, SKOLFS 2000:5. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2003). *Lusten att lära – med fokus på matematik: Nationella kvalitets-granskningar 2001-2002* (Skolverkets rapport nr 221). Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2004). *Nationella utvärderingen av grundskolan 2003.* Stockholm: Skolverket.

Sowder, J. (1998). Ethics in Mathematics Education Research. I A. Sierpinska & J. Kilpatrick (red.). *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity,* s. 427-442. Dordrecht: Kluwer.

Stacey, K. & Chick, H. (2004). Solving the Problem with Algebra. . I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (red.) *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study,* s. 1-20. Dordrecht: Kluwer.

Stacey, K., Chick, H. & Kendal, M. (2004). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study.* Dordrecht: Kluwer.

Stacey, K. & MacGregor,M. (2001). Curriculum Reform and Approaches to Algebra. I R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (red.). *Perspectives on School Algebra*, s. 141-154. Dordrecht: Kluwer.

Stiegler, J.W. & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap: Best Ideas From the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*. New York: Free Press.

Strässer, R. (2003). Research in Didactics of Mathematics: A Description and a Prototypic Example. *Proceedings of the Nordic pre-conference to ICME 10*. Växjö: Växjö Universitet.

Svenning, C. (1999). *Metodboken – samhällsvetenskaplig metod och metodutveckling.* Staffanstorp: Lorentz Förlag.

Utbildningsdepartementet (2004). *Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens.* SOU 2004:97.

Vygotskij, L. (1999). Tänkande och språk. (Öberg Lindsten, K., Övers.). Göteborg: Daidalos. (Original publicerat 1934)

Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Walberg, H.J. (1988). Synthesis of Research on Time and Learning. *Educational Leadership 45 (6)*, 76-85.

Walberg, H.J. (2003). *Improving Educational Productivity*. Publication Series No. 1, University of Illinois at Chicago.

Wallby, K., Carlsson, S. & Nyström, P. (2001). *Elevgrupperingar – en kunskapsöversikt med fokus på matematikundervisning.* Stockholm: Skolverket.

Wheeler, D. (1989). Contexts for Research on the Teaching and Learning of Algebra. I Wagner, S. & Kieran, C. (red.). *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra.* National Council of Teachers of Mathematics.

Zan, R. (1999). *The Quality of Research in Mathematics Education*. Inlägg i panelföreläsning, Quality of Research in Mathematics Education. Santarem, Spanien.

Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse VI - tidsfaktorn

Per-Eskil Persson
Klippans Gymnasieskola 2003

Innehållsförteckning

Förord

Detta är den sjätte rapporten i en serie rapporter om elevers kunskaper och färdigheter i algebra på Naturvetenskapsprogrammet och senare Teknikprogrammet på Klippans Gymnasieskola. De fem första rapporterna beskrev en longitudinell undersökning av de NV-elever, som höstterminen 1998 påbörjade sina gymnasiestudier. Min kollega Tomas Wennström och jag undersökte hur elevernas förmåga och attityder utvecklades under gymnasietiden och hur resultatet blev efter tre års studier.

Denna rapport är en uppföljande rapport till de tidigare, och inriktar sig på tidsaspekten i algebrainlärningen. Den elevgrupp som här studeras började sina gymnasiestudier höstterminen 2000, och är den första årskull som läser enligt de nya och reviderade tim- och kursplanerna. Studien avser att göra en jämförelse mellan de båda årskullarna med avseende på deras algebraiska förmåga och förståelse samt attityder till algebra och matematik.

Jag vill rikta ett varmt tack till Tomas Wennström för allt stöd med min undersökning. Vi arbetade tillsammans med den stora studien, och jag hade nog inte kommit igång med en uppföljning av denna utan hans uppmuntran och hjälp. Jag vill också tacka professor Barbro Grevholm för hennes många kloka synpunkter och konstruktiva kritik under arbetets gång.

Bakgrund

Under åren 1998 – 2001 genomförde jag tillsammans med min kollega Tomas Wennström en longitudinell studie av en årskull elever på naturvetenskapsprogrammet under deras tre år vid Klippans Gymnasieskola. Avsikten med studien var att studera hur deras algebrakunskaper utvecklades under gymnasietiden, och den inspirerades delvis av en debatt om de dåliga förkunskaper i matematik studenterna har när de börjar på högskolan. Denna debatt visar sig återkomma regelbundet, aktualiserad exempelvis i en artikel i Dagens Nyheter 15 februari 2003 med rubriken ”Studenterna allt sämre i matematik” skriven av tre professorer från KTH (Carleson, Håstad & Laptev 2003).

Vår studie gjordes ur ett lärarperspektiv. Vi var främst intresserade av såväl hur våra elevers algebrainlärning kunde befrämjas som hur vi själva skulle kunna förbättra våra arbetsmetoder i klassrummet. Bland frågorna vi fokuserade på var:

- Vad underlättar och vad försvårar algebrainlärning ?
- Vilka faktorer får vissa svagpresterande elever att till slut lyckas med algebra ?
- Vilken roll spelar affektiva faktorer som motivation och självförtroende för algebrainlärning ?

Resultaten av vår studie har presenterats i fem rapporter (Persson & Wennström, 1999; 2000a; 2000b; 2000c; 2001) samt två artiklar i Nämnaren (Persson & Wennström 2000d; 2002). Vi identifierade en rad viktiga faktorer som exempelvis god talförståelse, förståelse av variabler i deras olika roller i skolalgebran, färdigheter i att modellera problem och tolka algebraiska uttryck och resultat. De affektiva faktorerna är också mycket viktiga för elevernas möjligheter att göra framsteg. Särskilt gäller det för dem som från början har svårigheter med att klara algebra och kanske matematik i allmänhet. Lärarens sätt att möta eleverna i klassrummet är på många sätt avgörande. Eleven måste få börja med det hon/han verkligen kan och inte det hon/han enligt någon måttstock förväntas kunna. Både elev och lärare måste också tro att framsteg och lyckade resultat är möjliga. Intresserade hänvisas till dessa fem rapporter för detaljer.

Tidsfaktorn

I vår studie tyckte vi oss klart urskilja en försvårande faktor, nämligen den tid som fanns till förfogande för matematikinlärning. Vi skrev:

- *Elevernas inlärningssituation i NV2 har inte varit bra. Kursplanerna från 1994 innebär att eleverna på alltför kort tid möter en stor mängd nya begrepp inom bl.a. differential- och integralkalkyl och trigonometri. För de flesta elever är det en omöjlighet att smälta allt detta. Även om man, som vi gjort, prioriterar hårt, är situationen i stort sett orimlig.*
  (Persson & Wennström 2000c)
- *Motivation och självförtroende är oerhört viktigt om man skall lyckas. I detta sammanhang är tidsfaktorn mycket viktig. Om man – vilket ofta är fallet i matematik – på grund av alltför ambitiösa kurser tvingas gå fram för fort, blir många elever stressade och deras inlärning försämras. De hinner inte smälta stoffet, vilket medför att både motivation och självförtroende undergrävs. Risken är stor att de tappar lusten för matematik. Som vi framhållit i den här rapporten tror vi att detta drabbat en del elever i åk 2 och 3. Därför bör nog alla som sysslar med matematikutbildning ställa sig frågan om man inte bättre skulle kunna anpassa kursomfång till den disponibla tiden. Kanske mer kvalitet än kvantitet skulle ge bättre resultat i längden.* (Persson & Wennström 2001)

Diskrepansen mellan kursinnehållet och timplanen för de olika matematikkurserna, speciellt C- och D-kurserna, upplevdes som mycket besvärande för elever såväl som lärare. Det var speciellt tråkigt att se hur elevernas tidigare positiva attityd gentemot matematik skadades av den stressiga situationen. För de flesta resulterade det i ett ytligt och procedurellt lärande, i vilket glömskefaktorn snabbt satte in. För de svagpresterande eleverna kunde situationen vara förödande. Att tiden är en ytterst viktig faktor för framgång har beskrivits i olika studier och i Skolverkets nationella kvalitetsgranskning *”Lusten att lära – med fokus på matematik”* (Skolverket 2003) skriver man:

> ***Tid*** *är en resurs som rätt utnyttjad och tillsammans med andra resurser – lärarkompetens i vid bemärkelse, organisering av undervisningen utifrån elevers behov och nationella mål – kan skapa en god miljö för lärande. Meningsfull tid är ”den tid då man möter eleverna och känner att man har tänt en gnista till fortsatt lärande och utveckling”, menar t.ex. några lärare.*

En av slutsatserna i vår studie var att med en timplan bättre anpassad till kursinnehållet skulle elevernas kunskaper och färdigheter i matematik förbättras väsentligt, och speciellt skulle man se detta på algebrafärdigheterna. Vidare förutspådde vi en mera positiv attityd gentemot matematikämnet efter gymnasietiden, och det kanske även kunde inspirera till vidare matematikstudier på högskolenivå.

Läroplansförändringen 2000.

Problemen med tiden kontra innehållet i matematikkurserna, som hade uppstått när Lpf 94 genomfördes, uppmärksammades så småningom av Skolverket. När kurserna justerades och kompletterades i samband med läroplansöversynen 2000, gjordes ändringar som var avsedda att förbättra situationen, särskilt för C- och D-kurserna. Matematiken fick också mer tid, men genom en annan förändring av timplanesystemet kom det att slå ganska olika på olika gymnasieskolor, och tyvärr ibland fel. Tidigare hade kurserna helt enkelt fått så många undervisningstimmar, som deras poäng angav. I det nya systemet finns inga fasta timtal för de olika kurserna, utan man fastställer det lokalt. Eleverna ska under sin gymnasietid samla ihop till 2500 poäng, men får bara 2180 undervisningstimmar (87,2 %) om de går på ett teoretiskt program (2430 timmar, 97,2 %, på yrkesinriktade program). Det finns alltså inte fullständig tilldelning av timmar i förhållande till poängtalet, som avspeglar kursinnehållet. Till på köpet måste olika ämnen konkurrera om timmarna, vilket gör situationen ytterligare komplicerad. I tabellen nedan visas kurspoäng samt timplaner enligt det nya systemet som fastställts på Klippans Gymnasieskola:

	Ma A	Ma B	Ma C	Ma D	Ma E	Summa
Äldre poäng /timplan	140 + 10 stöd		50	40	60	300
Nya kurspoäng	150		100	100	50	400
Ny timplan i Klippan	135 + 10 stöd		80 (95)	80	45	350

Kurserna A och B har egentligen poängtalen 100 resp. 50, men läses som en AB-kurs utan tydlig timtaluppdelning. Med ”10 stöd” menas att dessa lektioner samlas till en pott med stödlektioner, till vilken tre klasser bidrar, och som ges till elever som lärarna anser är i behov av kompletterande undervisning under första året. Detta stöd har vi utförligt beskrivit i våra tidigare rapporter. Vidare står de 95 timmarna inom parentes för den tid eleverna på Teknikprogrammet får för kurs C, eftersom detta program räknas som yrkesinriktat program poängtalsmässigt och således får mer tid till sitt förfogande.

Om man ser till de enskilda kurserna, ser förändringen ut att halta betydligt, men samtidigt med poängjusteringen flyttades också vissa moment mellan kurserna. Främst kom avsnitt från B- och E-kurserna att flyttas till C- resp. D-kurserna. Förbättringen i timplanen ser man bäst i totala timtalet, som ökat med 50 timmar. Dessa har helt lagts på de två kurser där behovet var som störst, nämligen C- och D-kurserna. Hur såg då algebrainnehållet ut enligt de gamla och hur ser de ut i de nya planerna?

Kursplan 1994:

Ma A:

- *kunna teckna, tolka och använda enkla algebraiska uttryck och formler samt kunna tillämpa detta vid praktisk problemlösning*
- *kunna lösa linjära ekvationer och enkla potensekvationer med för problemsituationen lämplig metod -numerisk, grafisk eller algebraisk.*

Ma B:

- *kunna lösa andragradsekvationer samt linjära olikheter och ekvationssystem med grafiska och algebraiska metoder.*

Ma C:

- *känna till hur dataprogram kan utnyttjas som hjälpmedel vid studier av matematiska modeller i olika tillämpade sammanhang.*

Ma D:

- *förstå tankegången bakom några numeriska metoder för ekvationslösning och vid problemlösning kunna använda grafisk/numerisk programvara.* (Skolverket 1994)

I kursen Ma E tillkommer dessutom algebramoment med komplexa tal, men dessa har vi lämnat utanför våra undersökningar, eftersom inte alla elever läser E-kursen. Vidare finns en hel del algebra integrerad i andra moment, t.ex. funktionslära, exponentiella, logaritmiska och trigonometriska funktioner.

Kursplan 2000:

Ma A:

- *kunna tolka och hantera algebraiska uttryck, formler och funktioner som krävs för problemlösning i vardagslivet och i studieinriktningens övriga ämnen.*

- *kunna ställa upp och tolka linjära ekvationer och enkla potensekvationer samt lösa dem med för problemsituationen lämplig metod och med lämpliga hjälpmedel.*

Ma B:

- *kunna tolka, förenkla och omforma uttryck av andra graden samt lösa andragradsekvationer och tillämpa kunskaperna vid problemlösning.*
- *kunna arbeta med räta linjens ekvation i olika former samt lösa linjära olikheter och ekvationssystem med grafiska och algebraiska metoder.*

Ma C:

- *kunna ställa upp, förenkla och använda uttryck med polynom samt beskriva och använda egenskaper hos några polynomfunktioner och potensfunktioner.*
- *kunna ställa upp, förenkla och använda rationella uttryck samt lösa polynomekvationer av högre grad genom faktorisering.*

Ma D:

- *kunna förklara och använda tankegången bakom någon metod för numerisk ekvationslösning samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara.*
  (Skolverket 2000)

Samma kommentarer som ovan vad gäller E-kursen samt algebrans integration i andra matematikmoment gäller också de nya planerna.

När man jämför kursplanerna, verkar de nya innehålla fler moment. Speciellt gäller det C-kursen, som tidigare inte innehöll mycket om algebra. Men i praktiken tvingades man ändå gå igenom avsnitten om rationella uttryck, polynom och potensuttryck samt ekvationer där dessa ingick. Det förutsattes nämligen att eleverna kunde behärska dessa avsnitt när de tunga analysmomenten genomgicks. Problemet var bara att det fanns ytterst lite eller ingen tid till förfogande, vilket medförde att man tvangs att hasta igenom avsnitt, som borde vara fundamentet som analysen bygger på och som tillhandahåller de redskap den kräver. Detta var högst otillfredsställande och ledde också till att många elever fick problem med matematiken.

Frågeställningar kring tidsfaktorn

De nya kurs- och timplanerna infördes för de elever, som började sin gymnasiala utbildning höstterminen 2000 och genomfördes sedan successivt. Det borde vara av intresse att se vad effekterna av timplaneökningen blev vad gäller algebraiska kunskaper och färdigheter. Jag ville undersöka den första årskullen, som läste enligt de nya planerna. Denna grupp elever var vårterminen 2002 inne på sin fjärde termin. Det fanns dock ett litet problem med jämförbarheten mellan de ”nya” och de ”gamla” eleverna. Naturvetenskapsprogrammet hade tidigare innehållit en teknisk inriktning, men denna har nu brutits ut och blivit ett eget Tekniskt program. Samtidigt har programmets innehåll ändrats, och för matematikens del innebär det att endast ett fåtal elever läser D-kursen. I gengäld får övriga fler timmar på C-kursen. Det är också möjligt att det till Tekniska programmet söker sig elever, som tidigare inte kunnat tänka sig Naturvetenskapligt program, och som eventuellt är något mer svagpresterande i matematik. Detta var i så fall något som måste klargöras med hjälp av ett förkunskapstest. Jag beslöt därför att ta med alla elever, som går på Tekniskt program i undersökningen.

De frågor jag framför allt önskade ett svar på var:

- Hur påverkar den utökade tiden kunskaper och färdigheter inom de algebraområden som särskilt tilldelats mer tid i de nya kursplanerna?
- Har mer tid också en positiv effekt på övriga algebraområden?
- Är de affektiva faktorerna mer gynnsamma för eleverna nu?
- Lyckas lågpresterande elever klara matematiken i högre utsträckning med mer tid?

Det kan tyckas som om det borde vara ett jakande svar på samtliga frågor, men det är inte alls självklart. Mer lektionstid medför inte automatiskt bättre kunskaper och färdigheter. Det finns det tyvärr åtskilliga exempel på. Det viktiga är till vad och på vilket sätt tiden används. Man kan inte utgå från att det finns positiva ”överspillnings”-effekter på områden man inte utökat tidsmässigt. Och vad gäller de affektiva faktorerna är det alltid svårt att förutsäga effekterna av en sådan yttre förändring som tidsramen, även om tiden självklart är väsentlig för all inlärning.

Metod

Det var nödvändigt att först undersöka om elevgrupperna var jämförbara. Vid starten av deras gymnasiestudier testades samtliga elever på Naturvetenskapsprogrammet och senare även Teknikprogrammet med tre olika förkunskapstest i matematik, varav ett i algebra. Den ”gamla” gruppen bestod av 105 st., medan den ”nya” innehöll 78 st., fördelade på två naturvetarklasser och en teknikklass. Nedgången beror på den flykt från naturvetenskapliga studier vi tyvärr sett de senare åren. Förkunskapstestet kunde ge svar på om det kanske medfört att de som fortfarande sökt sig till dessa program i gengäld hade bättre kunskaper med sig och kunde tänkas vara mer högpresterande i förlängningen. Kanske var det också så att vissa specifika färdigheter hade förbättrats och vissa hade försämrats mellan mätningarna?

Vårterminen 2000 hade den ”gamla” gruppen krympt till 94 elever, fördelade på fyra inriktningar: naturvetenskap, teknik, miljö och data (lokal i Klippan). Vt 2002 bestod ”nya” gruppen av 67 st., fördelade på två program: Tekniskt och Naturvetenskapligt, det senare med tre inriktningar: naturvetenskap, miljövetenskap samt matematik och datavetenskap. Minskningarna beror i båda fallen på vanliga byten till andra program, utflyttningar m.m., och det finns ingenting som tyder på att det är någon större skillnad mellan ”gamla” och ”nya” elevers avhopp.

För undersökning av algebrafärdigheterna gavs eleverna i slutet av våren i årskurs 2 samma **test**, som motsvarande grupp gjort två år tidigare. Testet innehåller manipulativa färdigheter, förståelse av variabler och uttryck, skapande och tolkning av algebraiska uttryck samt att skriva förklaringar av två centrala begrepp: *ekvation* och *funktion*.

De affektiva faktorerna undersöktes med hjälp av en **enkät**, i vilken eleverna fick uttrycka sina åsikter om matematik som ämne, och då speciellt algebra, om timplanen och om matematikundervisningen de fått på gymnasiet. Enkät och test har sedan följts upp med **intervjuer** av vissa elever samt mina egna **observationer** i klassrummet.

Inom teknikprogrammet finns inga egentliga inriktningar, men det finns möjlighet att läsa de högre kurserna i fysik och matematik: Fy B samt Ma D och Ma E. På Klippans Gymnasieskola utgjordes den gruppen bara av 6 elever i den aktuella årskullen, varför dessa från höstterminen i årskurs 2 fick gå in i NV2A resp. NV2B i de två ämnena. I matematik är det alltså från och med C-kursen. Övriga elever i TE avslutar alltså sina matematikstudier efter C-kursen, men läser i gengäld den i lägre takt och med fler timmar till sitt förfogande (se ovan). För enkelhet skull refererar jag i analysen av testen och enkäten i årskurs 2 till ”NV-grupperna” innefattande dessa 6 teknikelever och ”TE-gruppen” som de övriga teknikeleverna. De två NV-grupperna bestod vt 2002 av 25 resp. 28 elever och TE-gruppen av 14 st.

Resultat

Förkunskapstestet

Testet bestod av ett antal uppgifter inom områdena ekvationer, förenklingar, förståelse för variabler och uttryck, värdeberäkningar, skapande och tolkning av uttryck samt linjär funktion.

Område som testas	Totala antalet uppgifter på området
Ekvationslösning	10
Förmåga att ställa upp ett algebraiskt uttryck	11
Algebraiska förenklingar	7
Användning av formler	8
Linjär funktion	4

Endast svar skulle lämnas och maximalt kunde man få 40 poäng. Så här fördelade sig totalpoängen, dels jämfört mellan de båda åren, och dels jämfört mellan klasserna ht 00:

Poängfördelning (%)

Poäng/Klass	ht 98	ht 00
0 - 5	0	0
5 - 10	2	1
10 - 15	3	4
15 - 20	4	4
20 - 25	9	19
25 - 30	30	29
30 - 35	33	23
35 - 40	19	19
Antal elever	105	78

Poängfördelning (%) ht 00

Poäng/Klass	NV1a	NV1b	TE1
0 - 5	0	0	0
5 - 10	0	0	4
10 - 15	0	0	12
15 - 20	0	0	12
20 - 25	19	8	32
25 - 30	41	27	20
30 - 35	22	35	12
35 - 40	19	31	8
Antal elever	27	26	25

Utgående från totalpoängen går det inte att dra slutsatsen att de ”nya” eleverna hade bättre förkunskaper, snarare tvärtom. Men det är viktigt att notera skillnaden mellan NV1-klasserna och TE1-klassen. Den syntes inte i de ”gamla” NV-klasserna, eftersom eleverna blandades där.

Var det då några specifika skillnader mellan färdigheter mellan de båda åren? Ja, en någorlunda säker slutsats man kan dra är att förenkling av uttryck, andragradsuttryck och vissa ekvationer har blivit sämre. Inmultiplicering i parentes (kring 25 %) och i synnerhet binommultiplikation (6 %) ligger väldigt lågt. Därmed inte sagt att detta är av ondo. Som vi föreslagit i våra tidigare rapporter, kan kanske den typen av förenklingar sparas till gymnasiet för många elever, och ersättas med andra, mer fundamentala, moment i grundskolan. Det är glädjande att se i förkunskapstestet att uppställning och tolkning av algebraiska uttryck tvärtom har förbättrats, vilket vi tror beror på att man på grundskolan lägger större vikt vid dessa moment i undervisningen.

Sammanställning och analys av testet i NV2

I slutet av vårterminen 2002 genomfördes i årskurs 2 ett färdighetstest, som var identiskt med det eleverna fått två år tidigare. Testet bestod av totalt 18 uppgifter (se bilaga A), varav uppgift 7 och 8 är öppna uppgifter, där ett par matematiska begrepp skall förklaras. Dessa båda uppgifter poängsattes inte och kommer att analyseras separat. Testet genomfördes utan hjälpmedel – varken räknare eller formelsamling fick användas.

På uppgift 1a-4d (12 uppg.) skulle endast svar lämnas. Helt rätt svar på en uppgift har gett 1 poäng. På uppgift 5a-c skulle lösning lämnas. För att få 1 poäng på dessa tre uppgifter skall både lösning och svar vara korrekt. På uppgift 6 skall en ekvation förklaras. För att få en poäng på denna uppgift skall förklaringen vara någorlunda fullständig (se nedan). Man kan alltså totalt få 16 poäng på testet.

Av totalt 67 elever genomfördes testet av 62 stycken, alltså ett bortfall på drygt 7 %. Bortfallet berodde på sjukdom och annan normal frånvaro och bör inte i någon nämnvärd omfattning ha påverkat utfallet och de slutsatser som dras nedan. Vid testet två år tidigare deltog 77 elever av 94. Det var fler deltagande elever, men bortfallet var större (18 %). Direkta jämförelser mellan procenttalen för de två undersökningarna får alltså göras med viss försiktighet.

Precis som vid förra testet gjordes även nu iakttagelsen att det fanns svårigheter med elevernas motivation för att göra sitt bästa på testet. Det genomfördes den 29 maj och eleverna var trötta och hade dålig uthållighet om någon uppgift tog emot. Meningen var dock att de båda testerna skulle genomföras under så likartade omständigheter som möjligt, och i det ingick naturligtvis tidpunkten. Testresultaten har troligtvis påverkats negativt, men förhoppningsvis lika mycket i de båda fallen.

Även om totalpoängen är av begränsat intresse, visas här först en sammanställning av elevernas totala resultat:

Tabell poängfördelning

Poäng	<3	3-4	5-6	7-8	9-10	11-12	13-14	15-16	*Tot*
Andel (%) vt00	1	9	13	17	18	26	14	1	100
Andel (%) vt02	3	5	8	18	19	23	18	6	100

Profilerna skiljer sig inte åt på något signifikant sätt utom att det är något fler, som klarat allt eller nästan allt rätt vt02. Observera exempelvis att 1% vt00 motsvarar 1 elev, medan 3 % vt02 motsvarar 2 elever, alltså ungefär samma antal.

Testet kommer att genomgås uppgift för uppgift med kommentarer och med de vanligaste felsvaren. Lösningsfrekvensen anges inom parentes med de senaste resultaten från vt02 först och med dem från föregående test vt00 för jämförelse därefter:

1. *Lös ekvationerna nedan*

a)	$4x - 15 = 75 - x$	*(vt02: 89 %*	*vt00: 74 %)*
b)	$\frac{x}{5} - 6 = 14$	*(vt02: 85 %*	*vt00: 86 %)*
c)	$2^x + 1 = 17$	*(vt02: 87 %*	*vt00: 81 %)*
d)	$x^2 + 4x - 5 = 0$	*(vt02: 61 %*	*vt00: 60 %)*
e)	$\sin 2x = 1 \, , \, 0 < x < \pi/2$	*(vt02: 50 %*	*vt00: 36 %)*
f)	$\lg x + \lg 2 = \lg 6$	*(vt02: 37 %*	*vt00: 22 %)*

Felsvaren på 1a, som x = 16 eller x = 20, beror på teckenfel eller slarv. Eleverna har klart för sig hur en linjär ekvation ska lösas, och säkerheten i lösningen verkar ha förbättrats sedan förra undersökningen, kanske på grund av mer färdighetsträning. 1b vållar inte heller så stora problem, även om exempelvis felsvaret x = 76 förekommer, vilket tyder på osäkerhet på prioriteringsreglerna. Noteras bör även att TE-gruppen hade betydligt lägre lösningsfrekvens än NV-grupperna. Endast ungefär hälften klarade uppgiften i TE, medan så gott som alla i NV fick rätt på den.

Uppgiften 1c och liknande har vi använt för att se om eleverna har klart för sig vad som menas med en lösning till en ekvation, och om de med prövning kan finna en enkel heltalsrot. I C-kursen löser man exponentialekvationer med hjälp av logaritmer, och ett par elever har svarat med det felaktiga $x = 16/\lg 2$. Ibland kan en lösningsmetod, som eleven tror sig kunna, visa sig vara en omväg som leder till fel svar.

På 1d är lösningsfrekvensen otillfredsställande låg, liksom den var vt00. Då var andelen, som bara gav en av lösningarna 25 %, och nu var den 23 %. Som synes är läget helt oförändrat, och man måste fråga sig varför. Eleverna måste vid det här laget veta att andragradsekvationer ofta ger två lösningar, så om man finner en, är det roligt att det finns en till. Kanske är det så, att roten x = 1 är så lätt att genomskåda med hjälp av enkel prövning och för den andra, x = -5, behöver man lösa ekvationen mer formellt? Och förra uppgiften löste man ju enkelt med prövning. Eventuellt har vi här en följd av tröttheten. Många orkade helt enkelt inte arbeta vidare med lösningen.

1e är speciell på det sättet att de flesta av TE-eleverna inte alls kommit i kontakt med den här typen av trigonometriska ekvationer. De känner inte heller till vinkelmåttet radianer. Vid testtillfället instruerades de om att hoppa över uppgiften. Även en del andra hoppade över den och det gav totalt 38 %, som ej avgav något svar. Räknar man bara dem, som läst D-kursen, blir lösningsprocenten 61 %. Vissa felsvar som $x = \pi$, $x = \pi/6$ eller $x = 45^\circ$ (vilket ju är rätt om vinkelmåttet är grader) förekom, men totalt sett är det någorlunda tillfredställande att nästan 2/3 av eleverna löser denna trigonometriuppgift utan räknare.

Ekvationen i 1f testar en logaritmisk förenklingsregel, som vid testtillfället introducerades ganska långt tillbaka i tiden för eleverna. Den hade heller inte övats på ganska lång tid, och för många var den förmodligen helt som bortblåst. Alltså chansade man på att logaritmer kan adderas som vanliga tal, och felsvaret x = 4 gavs av hela 48 %. En viss förbättring av resultatet visar nog ändå att den något längre tid, som ägnades åt avsnittet i C-kursen, gett utslag i att fler skaffat sig bestående kunskaper, som kunde tas fram när det behövdes.

Förmågan att formalisera en situation med ett algebraiskt uttryck är en väsentlig förmåga för att algebran ska kunna användas som ett kraftfullt verktyg i problemlösning. Detta testades i uppgifterna 2 och 3, som handlade om geometri med omkrets och area. Liknande problem har eleverna mött i max- och min-problem i C-kursen:

2. *I en rektangel är summan av längden och bredden 20 cm. Om längden är x cm, ställ upp en formel för arean A uttryckt i x.*
   (vt02: 77 %   vt00: 65 %)

3. *I en rektangel betecknas längden med x och bredden med y. Arean är 100 cm^2. Ställ upp en formel för omkretsen O uttryckt i x.*
   (vt02: 60 %   vt00: 51 %)

Uppgift 2 klarar en stor andel av, även om det förekommer felsvar som $A = (x - 20)(y - 20)$ eller $A = (20 - x)(20 - x)$ och slarv med parentes som $A = x \cdot 20 - x$. Som väntat var uppgift 3 svårare, och till en del beror det på att man sammanblandar omkrets och area, som exempelvis svaret $2x + 2(50 - x) = 100$, vilket 3 st. avgav. Flest felsvar (25 %) gavs med både x och y i uttrycket, som $2x + 2y = 100$ eller $O = 2x + 2y$ osv. Kanske eleverna avskräcks av uttryck med x i nämnaren, och undviker sådana trots instruktionen att omkretsen ska uttryckas i x.

Manipulering och omskrivning av algebraiska uttryck testades i uppgift 4:

4. *Förenkla uttrycken*

a) $3(4 - 3x) + 4(3 - 4x)$	*(vt02: 85 %*	*vt00: 82 %)*
b) $3(4 + 3x) - 4(3 - 4x)$	*(vt02: 79 %*	*vt00: 83 %)*
c) $(2x - 5)(3x + 4)$	*(vt02: 73 %*	*vt00: 77 %)*
d) $\dfrac{2x^2 - 8}{x - 2}$	*(vt02: 60 %*	*vt00: 32 %)*

I uppgifterna 4a-c har inga noterbara förändringar skett mellan de båda undersökningarna. Ej heller kan man se någon väsentlig skillnad mellan NV- och TE-grupperna. Dessa typer av förenklingar övades i A- och B-kurserna, och procenttalen visar hur bestående färdigheterna är. En utökad timplan för C- och D-kurserna har inte påverkat lösningsfrekvensen. Felsvaren är som väntat olika teckenfel eller som i 4c att x^2- och x-termer sammanblandas.

Däremot kan man se en klar förbättring för uppgift 4d. Förenkling och manipulering av rationella uttryck återfinns i början av C-kursen, men med den gamla timplanen hann man aldrig träna momentet i tillräcklig utsträckning. Det fanns också väsentliga brister i förståelsen av rationella tal, som eleverna bar med sig från starten på gymnasiet. Följden blev grunda kunskaper, som ganska snabbt vittrade bort. Den nya timplanen har uppenbarligen förbättrat situationen, men när siffrorna analyseras måste en viktig sak påpekas. Lösningsfrekvenserna för de tre undervisningsgrupperna är på denna uppgift mycket olika. De två NV-grupperna fick 83 % resp. 64 %, medan i TE-gruppen endast en elev klarade den. Skillnaden måste bero på den tid och ansträngning man har möjlighet att lägga ner på såväl förståelse av rationella uttryck som färdighetsträning av dem. Det mest frekventa felsvaret var $2x - 4$, som uppkommer när man förkortar i det rationella uttryckets termer. Men många, speciellt bland TE-eleverna, avgav inget svar alls (25 %). Momentet vållar fortfarande stora problem för åtskilliga, men det höga procenttalet för den ena NV-gruppen ger skäl för optimism. Det går att få bestående kunskaper även på detta avsnitt.

Till uppgifterna 5a-c skulle lösningar lämnas. Endast helt korrekta lösningar med rätt svar har medräknats i lösningsfrekvensen.

5. *Lös ekvationerna nedan*

a) $4(x+1)^2 - (2x-1)^2 = 39$	*(vt02: 42 %*	*vt00: 49 %)*
b) $\frac{4}{x-2} = \frac{2}{3}$	*(vt02: 63 %*	*vt00: 61 %)*
c) $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$	*(vt02: 10 %*	*vt00: 8 %)*

Här kan man inte se någon förbättring från föregående undersökning, snarare en mindre försämring på 5a. Särskilt på den sista uppgiften kunde man kanske ha förväntat sig något bättre med tanke på vad tidigare diskuterats om träning av rationella uttryck. De olika felsvaren måste granskas närmare.

Svårigheterna i 5a är dels att behärska kvadreringsreglerna, dels att hantera faktorn 4 och minustecknet framför parenteserna. 15 % gör olika fel i kvadreringsreglerna, som exempelvis

$(2x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 1$, $(x+1)^2 = x^2 + 1$ eller $(2x-1)^2 = 4x^2 + 4x - 1$.

Att multiplicera in fyran i parentesen först eller på ett felaktigt sätt gör hela 25 % av eleverna, vilket återigen visar hur svårt många har att föra över prioriteringsreglerna till algebran. Naturligtvis återfinns också de smärre lapsusfelen i lösningarna och några som inte lämnat någon lösning, men verkligt allvarligt är, att två elever helt tappade bort ekvationen. Det blev en förenkling av det hela och svaret gavs som ett uttryck. Att förstå skillnaden mellan en ekvation och en förenkling tillhör det mest grundläggande inom algebran.

Resultatet på 5b får anses som någorlunda bra, men många kom fram till lösningen genom att gissa svaret och sedan med prövning bevisa riktigheten i lösningen. En intressant fråga är om eleverna är säkra på det är den enda lösningen på ekvationen man funnit. Svaret är troligtvis nej, som vi ska se för 5c. Här ska dock ett par lösningar tas upp:

- Första steget blir: $\frac{4}{x-2} = 0,66$. Denna övergång till decimalform, här dessutom felaktigt avrundad, används ibland i matematikundervisningen för att ”lotsa” elever förbi problemen med bråkräkning (Löwing & Kilborn 2002). Dessvärre gör man då dem en björntjänst, eftersom de inte på det sättet lär sig ordentlig förståelse av rationella tal. När då ekvationer av den här typen dyker upp, utan miniräknare, blir det en dålig lösningsmetod. Nästa steg går bra för eleven: $4 = 0,66(x-2)$, men sen blir det fel vid inmultipliceringen: $4 = 0,66x - 0,33$. Att slutligen dividera 4,33 med 0,66 utan räknare blev alltför svårt.
- I följande lösning får man fundera ett tag på de olika stegen för att se hur eleven tänkt:

$$\frac{4x}{-2} = \frac{2x}{3} \quad , \quad \frac{2x}{-2} = 3 \quad , \quad 2x = 5 \quad , \quad x = 2,5$$

Här finns det en slags tankegång om att multiplicera med x på båda sidor för att bli av med x:et i nämnaren, en procedur som eleven tror sig minnas att man ska använda. Men åtgärden görs utan tanke på om den passar i det här fallet och dessutom helt felaktigt. De följande två stegen bekräftar sedan att elevens förståelse av vad uttrycken och då särskilt bråkstrecket står för är dålig. Dessvärre tillägnar sig många elever enbart instrumentella färdigheter, och om dessa används felaktigt, som i lösningsförsöket ovan, blir resultatet förödande.

Även på 5b var det stor variation på lösningsfrekvensen mellan undervisningsgrupperna. Den ena NV-gruppen uppnådde 79 % medan den andra samt TE-gruppen hade betydligt lägre frekvens.

5c var något av ett sorgebarn vid förra undersökningen och förblir tyvärr det även vid denna. Naturligtvis är det x:et i nämnaren, som leder till en del direkt felaktiga lösningsförsök. Men det främsta felet är att man inte genomskådar att det blir en andragradsekvation genom att man försöker med en ”gissa och pröva”-metod. Hela 27 % finner ena roten och då mestadels x = 2 även om ett par elever svarar x = ½. Roten är relativt lättfunnen och stämmer vid prövningen, varför man utan reflektion går vidare till nästa uppgift. Dessa elever har i alla fall förstått ekvationen och vet vad en lösning är.

Några (12 %) använder en riktig metod för att få bort nämnaren x, men arbetar inte med bråktal när formeln för andragradsekvationens lösning används. Man kommer fram till uttrycket $x = 1,25 \pm \sqrt{1,25^2 - 1}$, men klarar av naturliga skäl inte av kvadratrotutdragningen utan miniräknare. Eleverna visar sig här sakna tillräcklig träning t.ex. i kvadrering och rotutdragning av rationella tal, och dessa färdigheter behandlas ofta rätt dåligt av läromedlen i samband med momentet andragradsekvationer. Man förutsätter kunskaper som eleverna inte har, och detta måste uppmärksammas av läraren.

Även ganska allvarliga fel förekom, som visar en brist på åtskillnad mellan x- och x^2-termer, exempelvis:

$x + 1 = \frac{5x}{2}$, $2x + 2 = 5x$ osv. eller $\frac{x+1}{x} = \frac{5}{2}$, $x + 1 = \frac{5}{2}$

Vanligt var också att ingen lösning lämnades på uppgiften (27 %).

På uppgift 6 skulle eleverna förklara vad följande uppställda ekvation betyder:

6. *Långsidan på en rektangulär gräsmatta är 25 meter längre än kortsidan. Förklara kortfattat vad ekvationen nedan kan betyda.*
   2x + 2(x + 25) = 250 (vt02: 73 % vt00: 57 %)

Det finns två förklaringsmoment i uttrycket, dels vad x och x + 25 står för, och dels vad hela ekvationen står för. För att anses ha klarat uppgiften ska båda anges, och det var 15 % som bara angav att det handlar om omkretsen samt 6 % som bara definierar x och x + 25. Endast en enda elev tog miste och trodde att det handlade om arean. Resultatet visar på en klar förbättring, som kan bero på att de nya läroböckerna i större utsträckning än tidigare behandlar och tränar den här typen av översättningsfärdigheter mellan ”språket” algebra och problemtexter.

Vad menas med en ekvation och en funktion?

Med frågorna 7 och 8 på testet var avsikten att undersöka elevernas förmåga att ge enkla svar på hur två centrala begrepp inom algebran definieras. Det är viktigt att man kan skriva och uttrycka sig matematiskt på ett korrekt sätt och att man har en god tankekonstruktion för sådana nyckelbegrepp. Ekvationer av skilda slag har funnits med i matematikkursen sedan grundskolan och funktioner har behandlats utförligt åtminstone från A-kursen på gymnasiet. Begreppen har utförligt diskuterats såväl i helklass som i mindre grupperingar och borde i slutet av NV2 finnas ordentligt ”på plats” hos samtliga.

Vid det förra testtillfället presenterade eleverna en minst sagt varierad blandning av godtagbara, delvis godtagbara och felaktiga förklaringar. Dessvärre var resultatet denna gång inte mer uppmuntrande. Många hade problem att göra en ordentlig definition. Eller kanske det var så att man inte lade ner tillräcklig tid på att göra det omsorgsfullt, utan hellre tog till något enkelt exempel? Men det fanns också bra förklaringar eller förklaringar som tar upp någon viktig aspekt av ekvationer. Nedan presenteras osorterat några av de svar som avgavs utan statistik på hur många som var godtagbara osv.

7. *Förklara kortfattat vad som menas med en ekvation.*
(54 elever besvarade frågan)

Ekvation betyder lika. Man har ett okänt tal ex. x. vid ena sidan av likhetstecknet och tal på andra sidan och kan på så sätt lösa ut x. (flicka)

Ett uttryck för att få reda på värdet på något. Man betecknar det okända som t.ex. x. (flicka)

Det är man räknar ut ett tal man inte vet. (pojke)

En ekvation är när ett tal blir uppställt med siffror på bägge sidorna av likamedtecknet. Talen på bägge sidor ska vara lika stora. (flicka)

En ekvation är okända variabler (oftast sammansatt med konstanter) som tillsammans bildar ett svar som är beroende av storleken på variablerna. (pojke)

En ekvation är ett sorts problem som man ska försöka lösa med hjälp av siffror och bokstäver. (flicka)

Man har ett okänt värde som kan sättas till x, a, b eller någon annan bokstav. Detta sätts in i en formel och man får veta vad uträkningen ska bli. Därefter får man räkna ut vad det egentligen blir. (flicka)

En ekvation har en eller flera exakta lösningar. (flicka)

Med en ekvation menas att du räknar med tal som du inte vet vad det är. (flicka)

Ekvation är en beräkning där ett tal är okänt. Att lösa ekvationen innebär alltså att ta reda på det okända talet. (flicka)

En ekvation är ett sätt att lösa ett problem med ett okänt tal, t.ex. x. (pojke)

En ekvation hjälper en att lösa ett matematiskt problem utan fullständig information. (flicka)

I en ekvation har du ett okänt tal x som du vill ta reda på vad det är. Därför har du ett högerled och ett vänsterled som är lika med varandra. Sedan kan du lösa ut x (lösa ekvationen). (flicka)

Man har en eller flera obekanta som man sedan ska räkna ut. (pojke)

Det är när man har ett tal som man inte vet vad det är. Man kallar det x tills man räknat ut det. (flicka)

3 = 2 + 1 (pojke)

En formel som innehåller x. Man använder en ekvation för att ta reda på ett givet tal x. (flicka)

En ekvation är en typ av formel man kan använda för att räkna ut något, och i formeln har man vissa siffror och x och så. (flicka)

En ekvation är en matematisk uppgift som innehåller ett okänt tal t.ex. x. (pojke)

Vet ej! Kan det vara ett tal där man inte vet en del som skall vara med. (flicka)

En ekvation är ett tal där minst en variabel ingår. För att man ska kunna lösa ekvationen (lösa ut variabeln) måste ekvationen vara lika med nånting. Det måste finnas tal på båda sidor om likhetstecknet. (flicka)

Att man ställer upp och räknar ut ett matematiskt problem med minst en okänd.

När man läser igenom de olika förklaringarna, ser man att ekvationers olika kännetecken; *likheten*, *det okända talet*, *lösningen* eller användningen i *problemlösning*, finns med. Men det är få som själv ger en uttömmande förklaring. Slutligen kan vi se hur Nationalencyklopedin förklarar begreppet ekvation och samtidigt fundera på hur vi skulle bedömt ett sådant svar:

Ett (algebraiskt) sammanhang som uppfylls av en okänd storhet (ett obekant tal, vanligtvis betecknat med x). Syftet med ekvationen är att finna det obekanta talet (lösa ekvationen).

Begreppet funktion är svårare att förklara på ett bra sätt utan att det blir alltför ordrikt, vilket man också upptäcker i NE. Här ges åter ett urval av elevernas förklaringar:

8. *Förklara kortfattat vad som menas med en funktion.*
   (48 elever besvarade frågan)

En funktion är en ekvation med ökande eller minskande x. (flicka)

Man tecknar ett uttryck för någots förändring. (flicka)

Kommer inte riktigt ihåg!! Men jag har för mig att det är ett uttryck för något samband eller nåt sånt. (flicka)

En funktion är när en variabel sammansatt med konstanter bildar svaret på storleken på en annan variabel. En funktion bildar en kurva. (pojke)

Ett uttryck för att t.ex. visa en graf y(x). (flicka)

Med hjälp av en funktion kan man t.ex. räkna ut en sträcka, beroende på tiden. (flicka)

En funktion är en sorts formel ex. $y = x + 5$*. Om man sedan stoppar in x-värdet kan man få y-värdet. Man kan rita upp grafen och se hur y-värdet påverkas av x-värdet. (pojke)*

I en funktion är det något som påverkar något annat, t.ex. ugnens värme är ju olika beroende på hur lång tid det har gått sedan jag har satt på den. (flicka)

En funktion är en ekvation där två tal är okända. Genom att sätta in ett av talen kan man räkna ut det andra. (pojke)

I en funktion har du också x insatt i ett uttryck. Här sätter du istället in ett tal för x för att få y. y är beroende av x. (flicka)

En ekvation kan man jämföra med ett diagram. En kurva som är beroende av två variabler x och y. (flicka)

En funktion är nästan samma [som ekvation] *, men man använder den när man ritar grafer. En funktion har inget svar, inte på samma sätt som en ekvation. (flicka)*

En funktion är beroende av ett annat tal, t.ex. då x är en funktion av y i vissa uttryck. (flicka)

En funktion är en ekvation vars värde är beroende av en variabel. (pojke)

Ett sätt att räkna ekvationer. (pojke)

En förändring av någonting. (pojke)

Med en funktion menas att man genom att använda olika värden på det okända värdet kan få fram vilken inverkan det kan ha på en graf. (pojke)

Även här lyckas många elever få fram väsentliga egenskaper hos funktioner; *samband*, *oberoende-beroende variabel*, presentationen som *graf*, *förändring*, *tillämpningarna* m.fl. Glädjande många, åtskilligt fler än som här ges exempel på, skrev just om hur funktionerna används och kopplingen till grafer. Men det fanns också dem, som såg funktionerna i första hand som ett slags ekvationer. Visst ger man ofta funktionen i form av en ekvation, men detta är ju inte kärnan av vad funktioner handlar om. Det kan tyda på allvarliga brister i dessa elevers tankebyggnad kring begreppet, vilket innebär hinder för en fortsatt utveckling av deras algebrakunskaper.

Elevattityder och åsikter

Hur var då elevernas egen uppfattning om matematikundervisningen, dess betydelse, timtalet och matematikämnet som sådant? På enkäten ställdes några alternativfrågor med möjlighet att kommentera varje fråga. I slutet fanns tre öppna frågor kring matematikundervisningen (se bilaga B). Genomgående gav eleverna ganska få eller knapphändiga kommentarer till alternativfrågorna, men skrev tämligen fylligt på de öppna. Av organisatoriska skäl kom enkäten bara att ges i de två NV-grupperna och ej i TE-gruppen, vilket måste beaktas när svaren analyseras. Det var totalt 48 elever som besvarade enkäten.

1. *Vad tycker du om matematik som ämne nu?*
   (mycket tråkigt /ganska tråkigt /ganska roligt /mycket roligt)

En majoritet, 33 elever, angav att de tyckte matematik var *ganska* eller *mycket roligt*. Mest uppskattande var eleverna i ena gruppen, där 6 st svarade *mycket roligt*. 15 elever ansåg ämnet *ganska* eller *mycket* (1 elev) *tråkigt*. Här måste man ställa sig frågan om svaret inte helt beror på hur väl man lyckats i sina matematikstudier, och svaret är naturligtvis att det finns ett samband. En positiv attityd har ofta sitt ursprung i att man känner att man klarar av de uppgifter som ställs och får bekräftelse på det genom goda resultat på prov och i form av högre betyg. Ser man till hur dem, som svarat *mycket roligt*, är det i hög grad högpresterande elever, men faktiskt finns även lägre presterande elever med. Det finns också högpresterande elever, som dessvärre inte känner att matematikämnet är roligt, men vanligast är kommentarer som:

Har inte så lätt för det och då blir det automatiskt tråkigt. (pojke)

Allt är mycket svårt, man förstår ej, inget roligt då. (flicka)

Här ser man klara kopplingar till frågan om ämnets svårighetsgrad:

2. *Hur svårt tycker du matematik är nu?*
   (mycket svårt /ganska svårt /ganska lätt /mycket lätt)

33 elever ansåg att ämnet är *mycket* eller *ganska svårt*, och bara 14 tyckte det var *ganska lätt*. Ingen ansåg det vara mycket lätt, vilket väl är helt förståeligt med D-kursen i färskt minne. Exempel på kommentarer:

Jag hade inga problem alls med kurs A, B, C, men D tyckte jag var mycket svår. (flicka)

Det var ganska lätt i början men blev senare omöjligt eller i alla fall svårt. (pojke)

Även högpresterande elever angav ofta att ämnet är svårt, men oftare ganska lätt.

Det är ju inte lätt egentligen, men jag hänger med och tycker det är kul och då blir det hyfsat lätt. (flicka)

Det blir enklare ju mer man läser eftersom man har lättare att förstå. (flicka)

För naturvetarelever bör matematikämnet vara viktigt för såväl nuvarande som framtida studier och även inom ett framtida yrke.

3. *Anser du att matematik är ett viktigt ämne att kunna?*
   (inte alls viktigt /inte så viktigt /ganska viktigt /mycket viktigt)

Mycket riktigt svarar nästan alla (44 st) att det är *ganska* eller *mycket viktigt*. Kommentarer:

Matematiken använder man väldigt mycket i alla andra naturämnen också. (flicka)

Vi som läser NV eller TE ska antagligen söka vidare till något som har med matte att göra (pojke)

Någon som tyckte det var *inte så viktigt* skrev:

Det beror på din framtid. Basmatte är däremot väldigt viktigt. (flicka)

Dessa åsikter är naturligtvis helt i linje med hur matematikkurserna är uppbyggda. A- och B-kurserna innehåller till största delen basfärdigheter i matematik, medan de högre kurserna är mer inriktade mot programmets karaktärsämnen och mot vidare studier.

Hur kommer då algebramomenten in i matematikkurserna?

4. *Är algebraavsnitten (ekvationer, förenklingar, funktioner mm.) viktiga för att klara av matematiken?*
   (inte alls viktiga /inte så viktiga /ganska viktiga /mycket viktiga)

Det är 32 elever som svarar *mycket viktiga* på denna fråga och nästan resten tycker att de är *ganska viktiga*. Efter att C- och D-kurserna genomgåtts framgår det tydligt hur central algebran är som matematikens speciella språk:

All matte grundar sig ju på det. (pojke)

Man använder algebran nästan hela tiden även om man inte jobbar med just det avsnittet. (flicka)

På de sista flervalsfrågan ställs den viktiga frågan om hur eleverna upplever timplanen på C- och D-kurserna:

5. *Tycker du att lektionstiden för kurserna Matematik C och D (80 h + 80 h) har varit tillräcklig för att klara innehållet i dem?*
   (alltför kort tid /något knapp tid /tillräcklig tid /alltför lång tid)

Här svarar en liten majoritet av eleverna att tiden är *alltför kort* eller *något knapp* (26 st). Av de övriga anser 21 st att det är *tillräcklig tid* och bara en att det är *alltför lång tid* (utan motivering). Här är några typiska kommentarer:

Det är svårt att hänga med när det går snabbt. (pojke)

Kändes som man stressade igenom en del bitar (flicka)

Matte C räckte tiden. Matte D fick man skynda igenom varje kapitel. Man hann inte fördjupa sig. (flicka)

C var lite för stressig. D var helt OK. (flicka)

Alldeles lagom med tid. (pojke)

Ganska perfekt med tid, inte för stressigt, men man behöver jobba på den tid man har. (flicka)

Den sista kommentaren säger något viktigt om hur eleverna ser på den tid man har till sitt förfogande i kurserna. Det går inte att spilla bort någon tid eller att hoppa över läxorna. Då kommer man ofelbart i ett svårt och stressigt läge hela tiden, och då verkar den aldrig räcka till. I övrigt är dock intrycket att den oerhört pressade situation eleverna hade med C- och D-kurserna enligt den gamla timplanen nu försvunnit. Detta stämmer också med de uppföljande intervjuer jag gjort och med mitt intryck som lärare när jag iakttagit hur eleverna har arbetat med kursmomenten. Svårighetsgraden må vara hög, men elevernas positiva attityd till matematikämnet naggas inte i kanten på det sätt den gjorde tidigare. Elevernas förståelse för begreppen och för vikten av att uppöva goda färdigheter inom de olika momenten har enligt min mening också ökat, vilket är en förutsättning för att kunskaperna ska bli bestående.

De sista frågorna var öppna, utvärderande frågor om matematikundervisningen på gymnasiet (*bra*, *dåligt*, *bättre*). Eleverna har i stor utsträckning uttalat sig om lärarinsatser, lektionsplanering mm, som kanske är av mindre intresse här. På minussidan är det oftast brist på tid och viss stress som nämns återigen, och det är också här man önskar en förbättring:

Mer tid framför allt så att man hinner träna mer inför prov. (pojke)

Det är också flera som önskar mer tid för att arbeta med ”vardagsproblem”, ”problem från verkligheten”, ”problemlösning” etc. Detta stämmer väl med min egen åsikt om vikten av att förankra de matematiska begreppen och färdigheterna i större, tematiska uppgifter med verklighetsanknytning. Tyvärr är det svårt att hinna med sådana uppgifter i en kompakt kurs, som avslutas med ett nationellt prov, där eleverna vill uppnå goda resultat.

Slutligen kommer här några glädjande kommentarer om vad som varit bra med matematikundervisningen på gymnasiet:

Man har fått mer sammanhang och ordning. Man har lättare att se hur allting hänger samman. (flicka)

Den har varit väldigt intensiv och man har lärt sig mycket. Mycket eget ansvar. (flicka)

Spänner över stora områden. Gett bra grund för fortsatta studier. (pojke)

Kommer att ha stor nytta av det på det som jag ska läsa sen. (pojke)

Sammanfattning och slutsatser

Huvudfrågan i den här undersökningen är, hur tidsfaktorn påverkar dels kunskaperna i algebra, dels inställningen till algebra och matematik. Två relativt små grupper har fått genomgå test och enkät, och man måste alltid fråga sig hur säkra slutsatser man egentligen kan dra av en jämförelse mellan dem. Man kan nog konstatera att vissa av resultaten åtminstone visar på en förändringsriktning medan andra gör troligt att ingen förändring skett. Kvantitativt måste man dock ta jämförelsen med stor försiktighet.

Testet visar på en förbättring av vissa färdigheter med den nya timplanen. Förenkling av rationella uttryck är en sådan färdighet, och detta är ett avsnitt som verkligen getts större tidsutrymme och möjligheter för färdighetsträning än tidigare. Märkligt nog sågs ingen motsvarande förbättring för de rationella ekvationerna i den totala lösningsfrekvensen, men då måste man ta i beaktande de stora skillnaderna mellan NV- och TE-grupperna på samtliga uppgifter med rationella uttryck. Det visade sig vid kontroll, att TE-gruppen inte alls lagt mycket tid på detta avsnitt, eftersom det ansågs marginellt för dessa elever, utan man lade istället mer tid på polynomuttryck och –ekvationer. Ser man enbart till NV-grupperna är förbättringen påtaglig.

Också för de exponentiella, logaritmiska och trigonometriska ekvationerna kunde påvisas en ökad förmåga till manuell lösning. TE-gruppen hade inte läst D-kursen, och hade därmed ingen chans att klara sinusekvationen. De hade heller inte lagt mycket tid på förenkling av logaritmer. Ser man återigen till enbart NV-grupperna, klarar dessa sådana ekvationer klart bättre än vid tidigare.

Vad som däremot i stort sett visar status quo är förenkling av polynomuttryck och polynomekvationer av första och andra graden. Det är i många fall t.o.m. slående hur lika resultaten är. Bara i något fall är det en mindre förbättring och andra fall någon försämring. Men man ska då komma ihåg att förkunskapstestet visade att just de här färdigheterna hade försämrats för de ”nya” eleverna vid starten på gymnasiet. Avsnitten ingår i A- och B-kurserna, som i de nya timplanerna ju inte getts mer tid, utan faktiskt lite mindre. I C-kursen läses de huvudsakligen som en repetition med vissa utvidgningar, exempelvis faktoriserng av uttryck och polynomekvationer med grad tre och högre, som löses med faktorisering. Men just de aktuella uppgifterna på testet har inte fått mer av undervisningstid.

Uppgifterna som innebar uppställning och tolkning av algebraiska uttryck visar på en glädjande förbättring. Redan förkunskapstestet visade att eleverna hade en bättre utgångspunkt från grundskolan, och det har vi kunnat bygga vidare på. Just denna typ av färdigheter har vi ägnat mer tid åt i undervisningen, och de nya läroböckerna innehåller också betydligt fler uppgifter med träning på de viktiga delar av algebran, som gör den så användbar för problemlösning. Vi ser här frukten av en viktig förskjutning av fokus i matematik- och algebraundervisningen på senare tid, från en myckenhet av rutinmässig färdighetsträning till mer användning i kontextuella sammanhang. Algebran är ett språk och ett verktyg snarare än ett ändamål i sig (Bednarz et al 1996; Brekke 2001).

Den nya timplanen är inte tillräcklig, ansåg en liten majoritet av eleverna, och då gällde frågan bara C- och D-kurserna. Om samma fråga ställts efter AB-kursen, hade man förmodligen fått samma svar. Tyvärr har de tunga algebraavsnitten i Ma B inte fått någon utvidgad tid, trots att de manipulativa färdigheterna från grundskolan har avtagit. Vissa avsnitt i Ma C och D kände både jag och eleverna blev för stressiga med försämrat resultat som följd. Det återstår alltså ytterligare justeringar att göra i en kommande kurs- och timplaneförändring. Antingen måste mer tid ges för det matematikinnehåll, som kurserna har på gymnasiet och som i all fall högskolorna efterfrågar, eller måste man gallra bland momenten för att de ska hinnas med inom kurstiden. Det senare medför då att dessa moment skjuts till högskolan. I vilket fall som helst måste man arbeta för att komma bort från den nedbrytande tidsstressen, som ingen ser något gott med.

När det gäller attityden gentemot matematik och algebra, verkar det trots allt som om det blivit en positiv omsvängning. Eleverna uttrycker i högre grad sin uppskattning av såväl själva innehållet i matematikundervisningen som av sättet man blivit undervisad på. I mina och Tomas Wennströms tidigare rapporter har vi lagt stor vikt vid de affektiva faktorernas betydelse, och jag vill än en gång understryka dem. Frågan är vilket som egentligen haft störst betydelse för de ”nya” elevernas förbättrade resultat, den utökade tiden för färdighetsträning eller den minskade tidsstressen? Eleverna verkar i alla fall mer harmoniska i samband med matematikstudierna, vilket alla har fått nytta av. En del elever, som i förkunskapstestet fick mycket låga resultat, har ändå i fortsättningen klarat sig bra, men det visade redan förra undersökningen. Skillnaden är dock att några av dessa valde att avsluta sina matematikstudier efter den stressiga

D-kursen, medan en motsvarande elever nu istället fortsatt med E-kursen och i vissa fall även Ma Diskret och Ma Breddning.

Sammanfattningsvis slutsatserna i punktform:

- Manipulativa färdigheter har förbättrats inom avsnitt till vilka den utökade tiden har använts, exempelvis rationella uttryck och ekvationer eller exponentiella, logaritmiska och trigonometriska ekvationer.
- Inom områden som inte fått mer tid, exempelvis andragradsekvationer och förenkling av uttryck, kan ingen förbättring av de manipulativa färdigheterna upptäckas. Det finns ingen ”överspillnings”-effekt från avsnitten ovan.
- Översättning av situationer och problem till algebra samt tolkning av algebraiska uttryck är generellt bättre. Orsaken kan vara att vi lägger större vikt vid dessa färdigheter i skolmatematiken, både på grund- och gymnasieskolan, men också att den utökade tiden används för det här ändamålet.
- Eleverna anser inte att de nya och utökade timplanerna är fullt tillräckliga för innehållet i kurserna. Antingen måste timtalet utökas ytterligare, eller bör vissa avsnitt i kurserna strykas.
- Eleverna uttrycker i allmänhet en mer positiv attityd gentemot matematik efter sitt andra gymnasieår än de ”gamla” eleverna. De goda affektiva faktorerna har större möjlighet att verka när det finns tillräcklig tid för dem.

Som jag ovan uttryckt, existerar möjligheten att dessa slutsatser trots allt inte håller i längden och/eller att någon slumpfaktor påverkat resultaten. För att i någon mån minska risken för sådana felkällor, avser jag att göra ännu ett test i slutet av vårterminen 2003, dvs. när eleverna snart lämnar gymnasieskolan. De ”nya” eleverna kommer att ges samma uppgifter som de ”gamla” fick vårterminen 2001. Det kommer då att kunna visa sig om förbättringarna är bestående och således är till gagn för elevernas studier på högskolan och i deras fortsatta liv eller det bara var övergående. Resultaten av detta avslutande test kommer jag troligen att presentera i en sjunde rapport i vår serie ”Gymnasielevers algebraiska förmåga och förståelse”.

Referenser

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer.

Brekke, G. (2001). School algebra: Primarily manipulations of empty symbols on a piece of paper? I H. Chick et al (Eds.) *The Future of the Teaching and of the Learning of Algebra. Volume 1.* University of Melbourne.

Carleson, L., Håstad, J. & Laptev, A. (2003, 15 februari). Studenterna allt sämre i matematik. *Dagens Nyheter,* s.4.

Löwing, M. & Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik för skola, hem och samhälle.* Lund: Studentlitteratur.

Persson, P. & Wennström, T. (1999). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse.* Rapport Högskolan Kristianstad.

Persson, P. & Wennström, T. (2000a). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse II.* Rapport Högskolan Kristianstad.

Persson, P. & Wennström, T. (2000b). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse III.* Rapport Högskolan Kristianstad.

Persson, P. & Wennström, T. (2000c). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse IV.* Rapport Högskolan Kristianstad.

Persson, P. & Wennström, T. (2001). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse V.* Rapport Högskolan Kristianstad.

Persson, P. & Wennström, T. (2000d). Algebraisk förmåga och förståelse. *Nämnaren 27(2),* 55-61.

Persson, P. & Wennström, T. (2002). Algebraisk förmåga och förståelse, del 2. *Nämnaren 29(1),* 22–29.

Skolverket (1994). *Kursplaner 94, Naturvetenskapsprogrammet*, GyVux 1994:14. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2000). Skolverkets föreskrifter om kursplaner och betygskriterier för kurser i ämnet matematik i gymnasieskolan, SKOLFS 2000:5. Stockholm: Skolverket.

HÖGSKOLAN
KRISTIANSTAD

Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse VII - tidsfaktorn

Per-Eskil Persson
Klippans Gymnasieskola 2003

145

Innehållsförteckning

Förord

Detta är den sjunde och avslutande rapporten i en serie rapporter om elevers kunskaper och färdigheter i algebra på Naturvetenskapsprogrammet och senare Teknikprogrammet på Klippans Gymnasieskola. De fem första rapporterna beskrev en longitudinell undersökning av de NV-elever, som höstterminen 1998 påbörjade sina gymnasiestudier. Min kollega Tomas Wennström och jag undersökte hur elevernas förmåga och attityder utvecklades under gymnasietiden och hur resultatet blev efter tre års studier.

Denna rapport är en uppföljande rapport till den sjätte, och inriktar sig liksom denna på tidsaspekten i algebrainlärningen. Den elevgrupp som här studeras påbörjade sina gymnasiestudier höstterminen 2000, och var den första årskull som läste enligt de nya och reviderade tim- och kursplanerna. Eleverna avslutade sina gymnasiestudier vårterminen 2003. Studien avser att göra en jämförelse mellan de båda årskullarna vad avser deras algebraiska förmåga och förståelse samt attityder till algebra och matematik.

Jag vill rikta ett varmt tack till Tomas Wennström för allt stöd med min undersökning. Vi arbetade tillsammans med den stora studien, och jag hade nog inte kommit igång med en uppföljning av denna utan hans uppmuntran och hjälp. Jag vill också tacka professor Barbro Grevholm för hennes många kloka synpunkter och konstruktiva kritik under arbetets gång. Sist, men inte minst, ett stort tack till alla mina elever som stått ut med alla test, enkäter och intervjuer!

Bakgrund

Under åren 1998 – 2001 genomförde jag tillsammans med min kollega Tomas Wennström en longitudinell studie av en årskull elever på naturvetenskapsprogrammet under deras tre år vid Klippans Gymnasieskola. Avsikten med studien var att studera hur deras algebrakunskaper utvecklades under gymnasietiden och hur vi själva skulle kunna förbättra vår undervisning kring dessa grundläggande matematikfärdigheter.

Betydelsen av goda algebrakunskaper har framförts i åtskilliga sammanhang (se t.ex. Persson, 2002). Det finns flera skäl varför alla medborgare bör ha klart för sig grunderna inom algebra, och inte minst för elever på de naturvetenskapliga och tekniska utbildningarna är goda algebrakunskaper nödvändiga för att lyckas med högskolestudier inom dessa områden. Algebran är det symboliska språk, som matematiken använder sig av.

> *Written language is to oral language what algebra is to arithmetic.* (Vygotsky, 1986)

Resultaten av vår studie har presenterats i fem rapporter (Persson & Wennström, 1999; 2000a; 2000b; 2000c; 2001) samt två artiklar i Nämnaren (Persson & Wennström 2000d; 2002). Vi identifierade en rad viktiga faktorer som exempelvis god talförståelse, förståelse av variabler i deras olika roller i skolalgebran, färdigheter i att modellera problem och tolka algebraiska uttryck och resultat. De affektiva faktorerna är också mycket viktiga för elevernas möjligheter att göra framsteg. Särskilt gäller det för dem som från början har svårigheter med att klara algebra och kanske matematik i allmänhet.

Vad som emellertid lade stora hinder ivägen för stabila kunskaper i algebra var den tid, som avsatts för de olika kurserna, i synnerhet C- och D-kurserna (Skolverket, 1994). Vår förmodan var, att flera av de brister vi konstaterat i vår undersökning, delvis skulle avhjälpas om tiden utökades för matematiken. Detta var dock ingalunda självklart, utan måste påvisas genom en särskild studie. En justering av tim- och kursplanerna gjordes från höstterminen 2000 och genomfördes sedan successivt (Skolverket, 2000). Följden blev att C- och D-kurserna tilldelades mer tid, medan A-, B- och E-kurserna i stort sett behölls oförändrade. En jämförande undersökning igångsattes med följande frågeställningar (se Persson 2003):

- *Hur påverkar den utökade tiden kunskaper och färdigheter inom de algebraområden som särskilt tilldelats mer tid i de nya kursplanerna?*

- *Har mer tid också en positiv effekt på övriga algebraområden?*
- *Är de affektiva faktorerna mer gynnsamma för eleverna nu?*
- *Lyckas lågpresterande elever klara matematiken i högre utsträckning med mer tid?*

Eleverna inom Naturvetenskapsprogrammet (NV) och det nybildade Teknikprogrammet (TE) ingick i studien. Före år 2000 hade dessa båda ingått i Naturvetenskapsprogrammets olika inriktningar. Med test, enkät, intervjuer och observationer undersöktes eleverna i slutet av årskurs 2. Resultatet har redovisats i rapporten *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse VI – tidsfaktorn* (Persson, 2003). Slutsatserna, som drogs var följande:

- *Manipulativa färdigheter har förbättrats inom avsnitt till vilka den utökade tiden har använts, exempelvis rationella uttryck och ekvationer eller exponentiella, logaritmiska och trigonometriska ekvationer.*
- *Inom områden som inte fått mer tid, exempelvis andragradsekvationer och förenkling av uttryck, kan ingen förbättring av de manipulativa färdigheterna upptäckas. Det finns ingen ”överspillnings”-effekt från avsnitten ovan.*
- *Översättning av situationer och problem till algebra samt tolkning av algebraiska uttryck är generellt bättre. Orsaken kan vara att vi lägger större vikt vid dessa färdigheter i skolmatematiken, både i grund- och gymnasieskolan, men också att den utökade tiden används för det här ändamålet.*
- *Eleverna anser inte att de nya och utökade timplanerna är fullt tillräckliga för innehållet i kurserna. Antingen måste timtalet utökas ytterligare, eller bör vissa avsnitt i kurserna strykas.*
- *Eleverna uttrycker i allmänhet en mer positiv attityd gentemot matematik efter sitt andra gymnasieår än de ”gamla” eleverna. De goda affektiva faktorerna, såsom glädje och självförtroende, har större möjlighet att verka när det finns tillräcklig tid för dem.*

Mycket forskning kring algebrainlärning görs för närvarande, en del i Sverige (se t.ex Olteanu, 2003). Vid konferensen i Bellaria i Italien, CERME 3, presenterades flera studier av intresse inom algebraområdet. Bl.a. fanns en av Olteanu, Grevholm & Ottosson med titeln *Algebra in upper secondary school - a study of teachers´ teaching and student learning* (Olteanu, Grevholm &

Ottosson, 2003). Rapporten redogör för en pilotstudie för ett forskningsprojekt med huvudsyftena:

1. *To study how students' algebraic thinking develops, how they move from one way of understanding to another, and how their knowledge, skills, and ways of relating to the content change with the help of teaching.*
2. *How teachers think about their teaching of algebra, to what extent and in which ways they are aware of students' possible problems in understanding the content, and how the teachers give explanations and clarify students' problems in understanding.*

Detta forskningsprojekt tangerar min och Tomas Wennströms studie, men kan sägas vara mer inriktad på klassrumspraktiken. Constanta Olteanu skriver:

> *Det vore angeläget att få en bättre undervisning i algebra och för att kunna nå det behöver vi veta mer om vilka tankefel som elever vanligtvis gör, vilka egenskaper hos elever som inverkar på inlärning och prestationer i skolan, men också i vilken riktning undervisningen bör utvecklas.* (Olteanu, 2003)

Frågeställningar

Studien har gjorts med ett litet antal elever, och de kvantitativa slutsatserna kan därför vara vanskliga. Det är även möjligt att det inträffar förändringar i elevernas inställningar under det sista året. Flera kanske tappar sugen och hoppar av matematikstudierna under det sista året. E-kursen är ju möjlig att välja bort. För att delvis motverka eventuella felslut i studien från årskurs 2 var det därför nödvändigt att komplettera den med en studie av elevernas kunskaper och attityder då de avslutade sina gymnasiestudier. En ny studie gjordes med följande frågeställningar:

- I vilken utsträckning var de **manipulativa färdigheterna** stabila eller hade förbättrats? Hade några allvarligt försämrats?
- Hur hade de **transformerande färdigheterna** (formulering, tolkning, etc.) förändrats?
- Kunde man dra slutsatser om elevernas **förståelse** av och **förtrogenhet** med ett algebraiskt arbetssätt?
- Hur såg man på **tidsfaktorn** i efterhand? Var den tilldelade tiden i kurserna tillräcklig?

- Hade eleverna kvar sin i stort positiva inställning till matematiken de hade visat ett år tidigare? Fanns de goda **affektiva faktorerna** kvar?

Metod

Vårterminen 2000 uppgick antalet elever i årskurs 2, som deltog i studien till 94, medan antalet vårterminen 2002 var 67 stycken. I slutet av årskurs 3 hade antalet sjunkit till 92 resp. 66. Avgångarna mellan de båda åren var alltså marginella. Det handlar om i stort sett samma elevgrupper.

Det främsta undersökningsverktyget var ett likadant **test** av algebrafärdigheter, som getts två år tidigare. Testet innehöll uppgifter, som var avsedda att pröva:

- förenklingsfärdigheter
- ekvationslösning
- förståelse av bokstavssymboler
- formuleringsförmåga
- generalisering
- tolkning av uttryck

Testet följdes upp med **samtal** med eleverna kring testet och vad syftet med de olika uppgifterna var. I slutet genomfördes även en **utvärdering** av matematikämnet. Under matematiklektionerna gjordes också olika typer av **observationer** av eleverna för att se hur de arbetade med algebran, hur deras attityder till arbetet var osv.

Resultatet av ett test är delvis avhängigt av vilka matematikkurser eleverna läser vid testtillfället eller om de läser matematik över huvud taget. De 14 TE-eleverna, som inte läste utvidgad kurs i fysik och matematik hade ingen matematikkurs alls i årskurs 3, utan *Matematik C* var deras slutkurs. Dessa elever hade alltså inte fått någon speciell matematik-träning alls på nästan ett år, vilket måste beaktas när deras testresultat bedöms. De 6 elever, som läste Matematik C och D samt Fysik B, hade allt sedan början av årskurs 2 läst till-sammans med NV-eleverna i dessa båda ämnen. De har inte skiljt ut från NV-klasserna i sammanställningen av testresultaten nedan. Antalet i dessa klasser blev då sammanlagt 52 elever.

Huvudparten, dvs. alla utom 3, av NV-eleverna läste *Matematik E* under hela årskurs 3. De flesta hade också valt *Matematik Breddning*, vilken till största delen innehöll avsnitt från linjär algebra och matriser. Vidare hade en minoritet, 12 av 46, valt inriktningen *Matematik och datavetenskap*. I denna ingår kursen *Matematik Diskret*, som gav en del ytterligare möjligheter till träning av algebra (dock inte någon högre grad). En elev har alltså möjlighet att läsa totalt 500 poäng fördelade på 7 matematikkurser. Det är dock ett mindre antal, som i verkligheten väljer alla kurserna. Tyvärr följer inte timantalet med poängantalet. För en elev, som läser alla kurserna ser poäng och timplan ut så här vid Klippans Gymnasieskola:

	Ma AB	Ma C	Ma D	Ma E	Ma Bred	Ma Disk	Summa
Kurspoäng	150	100	100	50	50	50	500
Timplan	135	80	80	45	40	45	425

Som synes ligger medelvärdet av timtalet endast på 85 % av poängantalet, men med variationer mellan de olika kurserna. Dock är det totalt sett en klar förbättring jämfört med den tidigare timplanen, som endast gav 300 timmar fördelade på kurserna Matematik A-E.

I studien har jag varit både lärare och forskare, vilket kan vara problematiskt. Att försöka vara en objektiv iakttagare och faktainsamlare samtidigt som jag som lärare försöker föra elevernas kunskaper och färdigheter framåt är inte lätt. Risken är uppenbar att jag medvetet eller omedvetet påverkar eleverna åt ett visst håll. Och hur väljer jag ut testuppgifterna jag förelägger eleverna? Ett skydd mot något slags självuppfyllande profetia för studien har varit att det inte bara har varit mina egna elever jag studerat, utan tre olika klasser med tre olika lärare. En annan är, att jag använt uppgifter, som från början valdes ut för en helt annan grupp elever i samarbete med Tomas Wennström. Naturligtvis måste man också beakta att jag undersökt en liten grupp elever på en enda ort. Därför måste man vara försiktig med kvantitativa slutsatser baserade på lösningsfrekvenser, och snarare se till tendenser och utvecklingar ur ett kvalitativt perspektiv.

Resultat

Sammanställning och analys av testet i NV3

För att undersöka vilka algebrakunskaper som var stabila genomfördes i slutet av årskurs 3 ett sluttest. Det var identiskt lika det, som eleverna i NV3 fått två år tidigare (se Bilaga A). Testet består av totalt 20 uppgifter.

På uppgift 1-8 (totalt 17 uppgifter) skall endast svar lämnas. Helt rätt svar på en uppgift har gett 1 poäng. På uppgift 9 (3 uppgifter) skall också lösning lämnas. För att få 1 poäng på dessa uppgifter skall både lösning och svar vara korrekt. Detta innebär att man kan få totalt 20 poäng. Testet genomfördes utan hjälpmedel (räknare och formelsamling).

Av totalt 66 elever i NV3A, NV3B och TE3 genomförde 59 testet, vilket motsvarar 89 %. Detta ska jämföras med att endast 80 % gjorde det vårterminen 2001. Även denna gång fanns det svårigheter att finna ett lämpligt testtillfälle, som skulle vara samtidigt för alla tre klasserna. För vissa elever kan man nog anta att motivationen för att anstränga sig att lösa de svårare uppgifterna var låg. För dessa saknades ofta helt lösning. Vidare hade matematik blivit ovant för TE3-eleverna, som inte läst ämnet alls under det sista året. Det fanns alltså ett visst initialmotstånd, som också visade sig i många olösta uppgifter.

Totalpoängen för de enskilda eleverna diskuteras inte här, eftersom den är tämligen ointressant. Istället kommer jämförelser uppgift för uppgift att göras, dels med resultatet från föregående undersökning (Persson & Wennström, 2001), dels med testet i NV2 (Persson 2003a) i de fall där uppgiften har varit samma eller av liknande art. Lösningsfrekvensen anges inom parentes med de senaste resultaten från vt03 först och med dem från föregående test vt01 för jämförelse därefter. I förekommande fall anges även resultaten från årskurs 2 (vt 02 resp. vt00).

Uppgift 1 testar lösningsförmågan för några **ekvationer**.

1. *Lös ekvationerna nedan*

a) $4x - 15 = 75 - x$ *(vt03: 85 % vt01: 72 %)*

(NV2: vt02: 89 % vt00: 74 %)

b) $\frac{x}{5} - 6 = 14$ *(vt03: 78 % vt01: 86%)*

(NV2: vt02: 85 % vt00: 86 %)

c) $x^x + 3 = 7$ *(vt03: 75 % vt01: 70 %)*

d) $(x - 3)(2x + 1) = 0$ *(vt03: 42 % vt01: 28 %)*

För uppgift 1a kan man här se en stabil förbättring jämfört med tidigare. Om man i synnerhet ser till de båda NV-klasserna, som båda ligger över 90 %, är detta tydligt. Det mest frekventa felsvaret är x = 30, vilket är ett uppenbart teckenfel. Uppgift 1b synes ha genomgått en försämring, men ser man enbart till NV-klasserna, har de 85 % resp. 86 %, vilket är detsamma som vt01. TE-eleverna har haft svårt att hantera uppgiften och har gjort olika typer av fel. x = 40 eller x = 74 är tydliga exempel, men en stor flora av svårförklarliga felsvar fanns.

I uppgift 1c gavs en ekvation som inte förekommit i matematikkurserna. Avsikten var att se, om eleverna har klart för sig vad som menas med en lösning till en ekvation och om de kan hitta enkla heltalslösningar med hjälp av prövning. Att tre fjärdedelar av eleverna klarar detta får man beteckna som ganska tillfredsställande.

1d var vid förra undersökningen ett sorgebarn. Felet, som många gjorde, var att man först multiplicerade ihop parenteserna och sedan försökte lösa andragradsekvationen med hjälp av standardformeln. Man hamnar då i ett rotuttryck, som inte går så lätt att klara utan miniräknare. Även denna gång var det det vanligaste felet (22 %), men det var också vanligt att inget svar lämnades alls. Speciellt förekom det i TE-klassen. Om man bara ser till NV-klasserna var lösningsfrekvensen 49 %, vilket måste anses vara en mindre förbättring jämfört med tidigare (TE hade endast 17 %).

2. Förenkla uttrycken

a) $3(4 - 3x) + 4(3 – 4x)$ *(vt03: 75 % vt01: 77 %)*
(NV2: vt02: 85 % vt00: 82 %)

b) $3(4 + 3x) - 4(3 – 4x)$ *(vt03: 69 % vt01: 88%)*
(NV2: vt02: 79 % vt00: 83 %)

c) $(2x - 5)(3x + 4)$ *(vt03: 75 % vt01: 84 %)*
(NV2: vt02: 73 % vt00: 77 %)

d) $\frac{2x^2-8}{x-2}$ *(vt03: 44 % vt01: 22 %)*
(NV2: vt02: 60 % vt00: 32 %)

Frekvenserna för de båda undersökta årskullarna är desamma för 2a. Samma nedgång, fast aningen förstärkt för den senare gruppen, kan märkas. För 2b är det dock en större och helt otillfredsställande nedgång. Vad är det då för typiska fel, som görs? Felsvaren $-7x$ och $24 + 28x$ är vanliga, vilket visar osäkerheten vid teckenbytena. Dessa **förenklingsfärdigheter** härrör från Matematik A-kursen och borde sitta. Det måste anses vara devis ett misslyckande för algebraundervisningen i hela skolsystemet att de försämrats på detta sätt. I TE-klassen var det bara 58 % som klarade uppgiften!

För 2c syns samma nedgång från årskurs 2 till 3 i båda fallen. Även här är det teckenfel som spökar, och även denna uppgift får anses ha gett otillfredsställande resultat. Däremot verkar uppgången för förenklingar av rationella uttryck som i 2d stabil, i synnerhet om man ser till enbart NV-klasserna med 55 % lösningsfrekvens. Tyvärr är det 0 % för TE-eleverna, trots att det ingår i Matematik C-kursen, som alla läst. Redan i föregående rapport konstaterades att man för dessa inte haft möjlighet att lägga så mycket tid och kraft på de rationella uttrycken, och det visar sig genom att de alltför grunda kunskaper eleverna haft nu i princip är borta. De fåtal försök att lösa uppgiften, som gjordes, innehöll förkortning i termer och liknande fel.

Uppgifterna 3 och 4 testade förståelsen av bokstavssymboler på de högsta nivåerna enligt Küchemans klassifikation (Küchemann, 1981, se även Bergsten et al, 1995).

- **Bokstav som generaliserat tal**
- **Bokstav som variabel**

3. *Vad kan man säga om c om c+d=10 och c<d ?*
   (vt03: 63 %   vt01: 61 %)

4. *Vilket är störst 2n eller n + 2? Förklara!*
   (vt03: 54 %   vt01: 41 %)

Här synes ingen förändring för uppgift 3, medan det är uppenbart att eleverna klarar uppgift 4 bättre än tidigare. I själva verket är förbättringen för NV-klasserna ännu större. 62 % eller nästan 2/3 klarar uppgiften tillfredsställande. Svar som ”c ligger mellan 1 och 4”, $0 \leq c \leq 4$, etc. har inte godkänts. Dessa svar visar ändå på någon delförståelse av sambanden, och sammantaget ger det en någorlunda positiv bild av att eleverna nått de högsta nivåerna i Küchemanns schema. Grevholm har beskrivit hur i stort sett samma fråga som uppgift 4 getts till lärarstudenter för grundskolans senare år, före resp. efter en grundläggande algebrakurs (Grevholm, 2003). Före kursen klarade 83 % uppgiften med korrekt förklaring och efter kursen 82 %. De som gjorde fel sammanföll endast i ett par fall, så att totalt förmådde 26 % inte att reda ut uppgiften antingen före eller efter kursen. Svaret uppnåddes ofta genom gissningar och trial-and-error, vilket indikerar att studenterna använt samma metoder som skolelever gör.

Uppgift 5 är en klassiker inom algebrastudier, nämligen ”student-professor”-problemet (se t.ex. Kieran, 1992, sid 393).

5. På en skola finns det 9 gånger så många elever som lärare. Ställ upp en formel mellan antalet elever E och antalet lärare L.
   (vt03: 75 %   vt01: 59 %)

Flera av dem, som avgivit fel svar, skriver formeln $E \cdot 9 = L$. Man ”översätter” alltså meningen i den raka ordföljd den har, och får därmed fel formel. Resultatet har dock klart förbättrats från tidigare, vilket visar att elevernas algebraiska **formuleringsförmåga** nu befinner sig på en högre nivå.

Uppgift 6 är en mönsteruppgift av det slag, som numera övas tämligen tidigt i grundskolan och även senare i gymnasiet, även om man inte lägger så mycket tid på sådana övningar. Eleverna bör kunna klara åtminstone uppgift a och b även utan speciell träning på gymnasienivå.

* *	* * *	* * * *	* * * * *
	* * *	* * * *	* * * * *
		* * * *	* * * * *
			* * * * *
fig.1	fig.2	fig.3	fig.4

6. *Hur många stjärnor finns i*
   a) fig. 5 ? *(vt03: 90 %   vt01: 92 %)*
   b) fig. 100 ? *(vt03: 76 %   vt01: 66 %)*
   c) fig. n ? *(vt03: 75 %   vt01: 66 %)*

Ungefär 3/4 av eleverna klarar nu b- och c-uppgifterna, vilket får anses vara bra. Enbart NV-klasserna har faktiskt så mycket som 85 % resp. 83 %. Slutsatsen är, att majoriteten av eleverna klarar av att ställa upp en generell formel. Man kan nog dra slutsatsen att denna förbättrade färdighet beror på att den övas i högre utsträckning på grundskolenivå, och kan cementeras på gymnasiet i en stabil kunskap. Förkunskapstesterna i början av årskurs 1 har klart visat en stigande tendens hos eleverna att klara liknande mönsteruppgifter. Eftersom **generalisering** är en av grundpelarna för algebran, får detta anses vara en mycket positiv utveckling.

Även nästa uppgift handlar om att från text ställa upp ett **algebraiskt uttryck**.

7. *Av en ståltråd med längden 12 cm klipps biten x cm av. Av biten med längden x bildas en cirkel och av den andra biten en kvadrat.*
   a) Bestäm cirkelns radie uttryckt i x. (vt03: 41 % vt01: 35 %)
   b) Bestäm kvadratens sida uttryckt i x. (vt03: 61 % vt01: 69 %)

Eleverna i TE-klassen klarade denna uppgift ganska dåligt, och ser man enbart till NV-klasserna var frekvenserna nu 47 % resp. 68 %. En viss förbättring på a-uppgiften kan upptäckas, men fortfarande rör alltför många ihop area och omkrets och svarar med olika rotuttryck. Testet i NV2 innehöll ett par liknande uppgifter (dock något lättare):

2. *I en rektangel är summan av längden och bredden 20 cm. Om längden är x cm, ställ upp en formel för arean A uttryckt i x. (vt02: 77 % vt00: 65 %)*

3. *I en rektangel betecknas längden med x och bredden med y. Arean är 100 cm^2. Ställ upp en formel för omkretsen O uttryckt i x. (vt02: 60 % vt00: 51 %)*

Även om vissa framsteg gjorts, behöver dock formuleringsförmågan förbättras ytterligare. Även ”obekväma” uttryck, som innehåller π eller rotuttryck måste kunna ställas upp. Mer tid måste sannolikt ägnas åt detta!

Nästa uppgift testar förmågan att tolka ett algebraiskt uttryck.

8. *Äpplen kostar a kr/st och päron b kr/st. Förklara vad uttrycket 3a + 5b betyder. (vt03: 85 % vt01: 74 %)*

Svaret ”3 äpplen och 5 päron” har inte godkänts, men 2 elever har skrivit ”man köper 3 äpplen och 5 päron”. Det senare är ett gränsfall och skulle, om det räknats som godkänt svar gett 88 %. Om man tar enbart NV-klasserna hamnar man på 91 %. **Tolkning** av ett algebraiskt uttryck får anses vara tillfredsställande.

På uppgift 9a-c skulle **lösningar** lämnas. Endast helt korrekta lösningar med rätt svar har medräknats i lösningsfrekvensen.

9. *Lös ekvationerna nedan*

   a) $2x^2 + x - 3 = 0$ *(vt03: 27 % vt01: 12 %)*

b) $4(x+1)^2-(2x-1)^2=39$ *(vt03: 32 % vt01: 31 %)*

(NV2: vt02: 42 % vt00: 49%)

c) $\frac{4}{x-2}=\frac{2}{3}$ *(vt03: 54 % vt01: 43%)*

(NV2: vt02: 63 % vt00: 61 %)

Problemet i 9a för eleverna är detsamma, som de råkade ut för i uppgift 1d, nämligen att de inte vill använda bråktal i lösningen. Hela 44 % producerar ett godtagbart rotuttryck, som ger de korrekta rötterna till ekvationen ($-0,25\pm\sqrt{1,5625}$). Sedan klarar de av förståeliga skäl inte att beräkna kvadratroten. En marginell förbättring har skett, men slutsatsen är att träningen av bråkräkning och förståelsen av bråk generellt behöver ges mer utrymme.

För uppgift 9b, som också förekom i testet i NV2, uppvisar samma nedgång som tidigare. Felen är desamma; fel på teckenbyten, fel på kvadreringsregeln etc. Denna typ av andragradsekvation har eleverna egentligen inte tränat på allvar sedan Matematik B-kursen i årskurs 1. Här är ett tydligt exempel på hur icke stabila färdigheter vittrar sakta men säkert då de inte övas speciellt.

Uppgift 9c löstes inte av någon elev i TE-klassen, och räknar man enbart NV blir frekvensen 68 %. Tre elever hade skrivit att de inte hann de två sista uppgifterna, och kunde eventuellt ha klarat dem. Av de godkända lösningarna var det vanligast med en analytisk lösningsmetod. Endast tre stycken löste uppgiften med metoden gissa - pröva. Slutsatsen blir nog att färdigheterna i att hantera rationella ekvationer förbättrats en hel del (dock ej för TE-eleverna). Den utökade tiden i Matematik C-kursen för att behandla detta område inom algebran får anses ha gett den utdelning man hoppats på.

Elevattityder och åsikter

Under kursernas gång blev det många tillfällen till samtal med eleverna kring matematiken i allmänhet och algebra i synnerhet. Vi hade en öppenhjärtig stämning i klassrummet, och eleverna visste att de kunde ha synpunkter på undervisningen utan att det skulle ligga dem i fatet t.ex. vad gäller betygen. Min uppfattning var att eleverna trivdes med matematiken och visste vilken betydelse den hade eller kanske inte hade för dem i fortsättningen. Några sökte in till matematikintensiva högskoleutbildningar och kände nog ett visst tryck att lyckas med de avslutande kurserna. Andra hade planer på vidareutbildningar, som kanske inte skulle kräva så mycket matematik. Det var nog inte någon, som trodde att matematikkunskaper var värdelösa i livet, utan tvärtom något nödvändigt att bära med sig.

I slutet av matematikkurserna gjordes sedvanliga utvärderingar, där eleverna fick chansen att yttra sig om undervisningen. Vad var bra? Vad var dåligt? Vad kunde förbättras? Jag ville också att de skulle säga något om algebra och om gymnasiematematiken i stort. Här kommer några citat:

> *Man måste ju kunna algebra för att klara matten. Annars går det inte att göra nånting.*
>
> *Algebra måste man begripa om man ska läsa vidare på högskolan.*
>
> *Jag tyckte inte att matten var särskilt stressig, utom förstås när vi skulle ha nationella prov. Sen beror det förstås på hur mycket man själv jobbar, med läxor och så.*
>
> *Jag hade önskat mer tid för matte i ettan. Det verkade som om boken förutsatte att vi kunde en massa, som vi inte var säkra på.*

I undervisningen hade jag satsat redan från början på att använda grafräknarna i undervisningen, såväl i matematik som fysik. Min åsikt är att räknarna inte bara ska användas som ett verktyg för diverse beräkningar, utan även som ett didaktiskt instrument för att öka förståelsen och ge eleverna större möjligheter att utforska matematiken. Så här sa en elev:

> *Jag förstod matten bättre när jag fick använda grafräknaren.*

Naturligtvis ligger det en fara i att elever alltför lättvindigt förlitar sig på räknarna, även för uppgifter som de mycket väl klarar utan. De manuella färdigheterna får inte glömmas bort, och de testas också i delprov 1 inom de nationella proven. De tester jag gav eleverna i den här studien var också utan räknare, vilket bör noteras.

Sammanfattning och slutsatser

Den övergripande frågeställningen i denna studie är om slutsatserna från rapport 6 (Persson, 2003) kunde verifieras eller om de kanske var förhastade. Resultatet pekar tämligen entydigt på att de står sig väl och kanske även har stärkts.

Behandling av rationella uttryck och lösning av rationella ekvationer har förbättrats. Detta avsnitt har speciellt givits mer tid med den nya kursplanen för Matematik C. Däremot var bilden tämligen blandad när det gäller förenklingar av polynom, användande av algebraiska regler som kvadreringsregeln samt lösning av polynomfunktioner. I vissa fall fanns det en viss förbättring, i några rentav en försämring. Dessa avsnitt finns i AB-kursen, som tyvärr fått en smärre minskning med den nya timplanen. Några elever har också mycket riktigt klagat just på att tiden för AB-kursen borde ha varit utvidgad. Ett fåtal elever fick möjligheten till en extra stödtimme i veckan under hela årskurs 1, och för dessa verkade nog tidsomfånget mera rimligt. Man kan nog med fog rekommendera att timplanen utvidgas till 150 timmar, inte minst med tanke på den spridning av förkunskaperna, som eleverna har då de börjar med gymnasiekurserna.

De transformerande färdigheterna, formulering av algebraiska uttryck, tolkning av uttryck, förmåga att se mönster etc., har redan från början legat på en högre nivå. För så gott som samtliga uppgifter på testet ser man en klar ökning av förmågan att klara sådana uppgifter. Fokus inom algebraundervisningen har under senare år förskjutits från manipulering av uttryck och ekvationer till transformerande färdigheter. De är nödvändiga om algebran på allvar ska kunna användas i problemlösning. Den nya generationen av läroböcker (från 1999 och framåt) behandlar också algebra på ett delvis annorlunda sätt. Man satsar långsiktigt, redan från tidiga år i grundskolan, på att eleverna ska kunna urskilja och bygga mönster, på att uttrycka okända tal med symboler osv. Det är detta som i slutet av årskurs 3 i gymnasiet nu burit frukt i form av större förtrogenhet med ett algebraiskt arbetssätt. Förhoppningen är, att det även ska märkas när eleverna kommer till högskolan som studenter.

Den gynnsamma utvecklingen av elevernas attityder till matematiken och matematikundervisningen har glädjande nog fortsatt. Det kändes att de ”nya” eleverna var mer trygga med matematiken i klassrummet än de ”gamla” var. Mycket av tidsstressen hade försvunnit, om än inte helt och hållet. Även de elever, som från början hade det svårt med matematiken, lyckades i slutänden, till och med genom att klara Matematik E. I åtminstone ett fall vittnade en sådan elev om att det var grafräknaren, som hjälp honom till förståelse av de svåraste avsnitten.

Sammanfattning av slutsatserna:

- De **manipulativa färdigheterna** hade förbättrats inom avsnitt, som specifikt getts mer tid i timplanerna, som t.ex. rationella uttryck. För områden, som inte fått mer tid var bilden splittrad. När det gäller vissa förenklingar, exempelvis, hade en försämring inträffat.

- **Transformerande färdigheter** visar en klar uppåtgående tendens, vilket förstärker elevernas möjligheter att använda algebra i problemlösning. De är också en viktig del av elevernas **förståelse** och **förtrogenhet** med algebran, som tydligt verkar ha ökats.
- Elevernas svar när det gäller den viktiga **tidsfaktorn** visar att den förbättring av timplanerna som gjordes trots allt inte är tillräcklig. *Tidsplanen för Matematik AB bör utvidgas till 150 timmar.*
- Den positiva inställningen till matematiken och algebran är stabil även efter årskurs 3. Slutsatsen är att de **goda affektiva faktorerna** fått tid att verka.

Här är det på sin plats att ställa en angelägen fråga. Är det möjligt att ytterligare förbättra tidsanvändningen i matematikkurserna och därmed förstärka den goda utvecklingen som denna studie gett stöd för? Ett sätt vore att utnyttja grafräknarna bättre som ett didaktiskt instrument. Kanske finns det manipulativa färdigheter man kan skära ner övningstiden för eller som man helt kan stryka från gymnasiekurserna? Man kan se på hur det har gått med en del numeriska metoder man tidigare lade ner mycket tid på, men som med grafräknarna är onödiga. Newton-Raphsons metod eller Eulers stegmetod kan nämnas. Den omständliga presentationen skymde faktiskt det metoderna var avsedda att användas till. På samma sätt kan man ifrågasätta en hel del inom analysen, t.ex. vissa integrations- och deriveringsmetoder. Kanske är det dags att på allvar införa symbolhanterande räknare i svenska klassrum som en del i undervisningen? Tiden man måste satsa för att eleverna ska kunna använda dem kan man få tillbaka med råge om man ser till de problemtyper som blir möjliga att arbeta med. Kanske vi fokuserar på delvis fel saker i ett framtidsperspektiv.

> *It is possible that the Swedish textbooks are too focused on methods and algorithms, or that the teachers use the books in a way which encourages memorisation of methods and algorithms. It is easy to find exercises to in the books where the students will not need to use anything more than to remember a method in order to solve the problem.* (Bergqvist, 2001)

En förändring av undervisningens inriktning i svenska klassrum är på gång. I en del länder, exempelvis USA eller Österrike, har man arbetat mer målinriktat på att föra in grafräknare och CAS i klassrummen (se Waits & Demana, 1998; Griffith, 1998; Laughbaum, 1998; Demana, 1999 och

Kutzler, 1999). Men det kräver en förändring av de didaktiska metoder som används:

> *Traditional methods will most certainly change, but it should be obvious that a core of mathematical knowledge must remain unchanged. All the same, very definite advantages are clear when graphing calculators are used, and instruction must take care of these. The better one masters the technique and the better knowledge of mathematics one has, the more powerful a tool the graphing calculator is.* (Dahland & Lingefjärd, 1996)

Bergqvist (1999) beskriver i en artikel ett försök där gymnasieelever fick undersöka faktorisering av andragradspolynom med hjälp av grafräknare i ett undersökande arbetssätt. Han skriver i slutsatserna:

> *Det är svårt att avgöra vilken effekt elevernas arbete har haft på deras inlärning, men jag anser mig ändå ha fått visst stöd för att ett undersökande arbetssätt med hjälp av grafritande miniräknare ger möjlighet för elever att få en bättre förståelse för begreppet faktorisering och för faktorsatsen samt en större insikt i kopplingen mellan grafiska och algebraiska representationer av funktioner och ekvationer. Hur denna typ av arbetssätt kan användas i det dagliga arbetet i matematikklassrummet och inom vilka områden det passar in är viktiga frågor som bör bli föremål för framtida forskning.*

Jag har under de år jag följt mina naturvetarklasser genom deras tre år på gymnasiet sett prov på vilka utomordentliga verktyg grafräknarna varit i matematiken. Speciellt intressant har varit att konstatera att de även hjälpt eleverna med själva förståelsen av begrepp och representationer. Dessa iakttagelser har jag dessvärre inte dokumenterat på ett systematiskt sätt, men bör kunna utgöra ämnet för vidare studier, speciellt inom området algebra. Vidare vore det intressant att göra en undersökning av hur införande av symbolhanterande räknare påverkar matematikundervisningens innehåll och arbetsmetoder. Viktigt arbete har gjorts och beskrivits, bl.a. av Herget et al. (2000). I artikeln tar författarna upp den viktiga frågan vad man egentligen bör kunna klara manuellt och vad man huvudsakligen kan lämna till grafiska/symboliska räknare. Detta är ett forskningsområde, som är av stort intresse, och som borde utvecklas vidare även i Sverige.

Referenser

Bergqvist, T. (1999). Gymnasieelever undersöker ett matematiskt begrepp med grafräknare. *Nordisk Matematikdidaktik 7,* nr 3-4, 35-60.

Bergqvist, T. (2001). *Secondary School Students Using Graphing Calculators. Revised version*. Research reports, No 6, Department of Mathematics, Umeå universitet.

Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla.* NämnarenTEMA. Kungälv: NCM, Göteborgs Universitet.

Dahland, G. & Lingefjärd, T. (1996). Graphing calculators and students´interpretations of results: A study in four upper secondary classes in Sweden. *Nordisk Matematikdidaktik 4*, nr 2/3, 31-50.

Demana, F. (1999). *Bridging the gap from arithmetic to algebra using the TI-83.* The Ohio State University. Columbus, Ohio.

Grevholm, B. (2003). Student teachers's conceptions of equalities and inequalities. *Nordic Preconfernce to ICME 10.* Växjö.

Griffith, L. (1998). Impact of technology on pedagogy. I *Proceedings of the Eleventh Annual International Confrence on Technology in Collegiate Matematics*. Ed. Gail Goodell, Addison-Wesley Longman Publishing Company, sid 146-148.

Herget et al. (2000). I vilken utsträckning behöver elever kunna räkna för hand när det finns datoralgebra. *Elementa 01*, nr 3, 116-124.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. I D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan.

Kutzler, B. (1999). *The algebraic calculator as a pedagogical tool for teaching mathematics.* Austrian Center for Didactics of Computer Algebra. Österrike.

Kücheman, D. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.) *Children's understanding of mathematics: 11-16.* London: John Murray

Laughbaum, E.D. (1998). Multiplicity of algebraic methods using graphing calculator technology: A variety of ways of doing and teaching algebra. I *Proceedings of The First International Commission on Mathematical Instruction – East Asia Regional Conference on Mathematics Instruction,* Vol.3.

Löwing, M. & Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik för skola, hem och samhälle.* Lund: Studentlitteratur.

Olteanu, C. (2003). Algebra – viktigt men svårt. *Nämnaren 30(3)*, 35- 39.

Olteanu, C., Grevholm, B. & Ottosson, T. (2003). Algebra in upper secondary school – a study of teacher's teaching and student learning. *Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education.* Bellaria, Italien. http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/WG6/TG6-list.html

Persson, P. & Wennström, T. (1999). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse.* Tsunami, nr 1/2003. http://tsunami.hkr.se/

Persson, P. & Wennström, T. (2000a). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse II.* Tsunami, nr 2/2003. http://tsunami.hkr.se/

Persson, P. & Wennström, T. (2000b). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse III.* Tsunami, nr 3/2003. http://tsunami.hkr.se/

Persson, P. & Wennström, T. (2000c). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse IV.* Rapport Högskolan Kristianstad.

Persson, P. & Wennström, T. (2001). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse V.* Rapport Högskolan Kristianstad.

Persson, P (2003). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse VI – tidsfaktorn.* Rapport Högskolan Kristianstad.

Persson, P. & Wennström, T. (2000d). Algebraisk förmåga och förståelse. *Nämnaren 27(2),* 55-61.

Persson, P. & Wennström, T. (2002). Algebraisk förmåga och förståelse, del 2. *Nämnaren 29(1),* 22–29.

Persson, P (2002). Behöver alla lära sig algebra? *Nämnaren 29(3)*, 24- 31.

Skolverket (1994). *Kursplaner 94, Naturvetenskapsprogrammet*, GyVux 1994:14. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2000). *Skolverkets föreskrifter om kursplaner och betygskriterier för kurser i ämnet matematik i gymnasieskolan*, SKOLFS 2000:5. Stockholm: Skolverket.

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and Language*. Cambridge: The MIT Press.

Waits, B. & Demana, F. (1998). *The role of graphing calculators in mathematics reform.*The Ohio State University. Columbus, Ohio.

Appendix

A. Diagnostiskt test i algebra för åk 1

Du får inte använda räknare, men du får naturligtvis göra räkningar på kladdpapper. Testet skall hjälpa oss att lägga upp dina matematikstudier på bästa sätt. Skriv svar på bladet.

1. Lös ekvationerna nedan

   a) x + 25 = 55 ....

   b) x - 25 = 55 ....

   c) 5x = 45 ....

   d) x/5 = 8 ....

   e) 4x - 15 = 75 ....

   f) $\frac{x}{5} + 6 = 14$ ....

   g) 2^x -1 = 7...........................

2. Hitta på två olika ekvationer som har lösningen x = 10.

   ....

   ....

3. Vilket av talen nedan är en lösning till ekvationen.

   5 10 15 20 25

   a) 4x + 30 = 80 - x

   ....

   b) 5x - 10 = 130 - 2x

   ....

4. Vilket eller vilka skrivsätt nedan anger alltid ett tal som är.

   k + 5 k + 2 2k k + k

   0,5k $\frac{k}{2}$ $\frac{k}{5}$ 5k

   a) dubbelt så stort som k

   ....

   b) hälften så stort som k

   ....

   c) 5 gånger så stort som k

   ....

   d) 2 mer än k

   ....

5. Förenkla uttrycken

   a) 4x - x................................

   b) 8x + 15 + 4x - 5 ....

   c) a - 3a + 2a ....

   d) y + 3(4 + 3y) + 8 ....

   e) 10x + 3(4 - 3x) + 8

   ....

   f) 10x - 3(4 - 3x) - 8

   ....

   g) (2x - 5)(3x + 4)

   ....

6. Beräkna uttryckets värde om x = 20

a) $5x + 25$ ....

b) $500 - 10x$ ....

c) $x^2 + 50$ ....

d) $x^2 + 10x$ ....

e) $2x^2$ ....

f) $(x + 10)^2$.........................

7. Låda A väger a kg, låda B väger 50 kg mer än låda A och låda C väger 3 gånger så mycket som låda A. Hur mycket väger

a) låda B ....

b) låda C.............................

c) låda A + låda B (förenkla svaret)

....

d) alla tre lådorna (förenkla svaret)

....

8. Kostnaden y kr för en tidningsannons beräknas så här: $y = 50 + 10x$, där bokstaven x betecknar antalet rader i annonsen.

a) Hur mycket kostar 10 rader ?

....

b) Hur många rader får man för 200 kr ?

....

9. * *** ***** ***** **

fig 1 fig 2 fig 3 fig 4

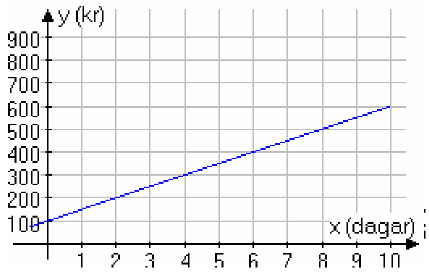
a) Hur många stjärnor har fig 10 ?

....

b) Hur många stjärnor har fig n ?

....

10. Diagrammet visar sambandet mel-



lan kostnaden och antalet dagar då man hyr en cykel.

a) Vad kostar det att hyra en cykel i sex dagar ?

....

b) Hur många dagar kan man hyra en cykel för 300 kr ?

....

c) Vad är grundavgiften ?

....

d) Skriv en formel för linjen.

....

Namn:______________________

B. Preliminär sammanställning algebratest i NV1 september 98

I testet deltog 105 elever i NV1.

Poängfördelning i klasserna och hela årskursen (max 40 poäng)

Poäng/Klass	NV1a	NV1b	NV1c	NV1d	totalt
0 - 5	0%	0%	0%	0%	0%
5 - 10	0%	0%	8%	0%	2%
10 - 15	4%	0%	4%	3%	3%
15 - 20	4%	12%	0%	0%	4%
20 - 25	0%	8%	13%	14%	9%
25 - 30	38%	31%	17%	34%	30%
30 - 35	31%	27%	50%	28%	33%
35 - 40	23%	23%	8%	21%	19%
	100%	100%	100%	100%	100%

Lösningsfrekvens

Uppgift	1a	b	c	d	e	f	g	2a	b	3a	b
Lösningsfrekvens	90%	95%	96%	96%	71%	81%	51%	90%	87%	83%	81%
Uppgift	4a	b	c	d	5a	b	c	d	e	f	g
Lösningsfrekvens	60%	62%	98%	93%	84%	83%	54%	60%	54%	42%	19%
Uppgift	6a	b	c	d	e	f	7a	b	c	d	8a
Lösningsfrekvens	93%	95%	83%	80%	65%	53%	87%	87%	60%	59%	86%
Uppgift	b	9a	b	10a	b	c	d				
Lösningsfrekvens	80%	86%	34%	99%	99%	90%	51%				

Uppgiftstyper

Område som testas	i uppgift	Totala antalet uppgifter på området
Ekvationslösning	1,2,3	10
Förmåga att ställa upp ett algebraiskt uttryck	4,7,9,10d	11
Algebraiska förenklingar	5	7
Användning av formler	6,8	8
Linjär funktion	10	4

C. Matematikenkät för NV1

Det har visat sig att goda kunskaper i algebra har stor betydelse för hur man lyckas med matematikstudier både i gymnasiet och vid högskolan. Frågorna i denna enkät ställs som ett led i ett forskningsprojekt, som på sikt har till syfte att förbättra matematikundervisningen i framför allt algebra. Tanken är att vi skall följa ett antal elever vid Klippans Gymnasieskola under tre års gymnasiestudier och försöka kartlägga hur deras förståelse och förmåga i algebra förändras under denna tid. Denna enkät kommer för en del elever att följas upp med en intervju. För att vi skall kunna följa enskilda elever under tre år behöver vi namnet på den som besvarat enkäten. *I alla rapporter och andra sammanhang där studien presenteras kommer namnen att plockas bort och ersättas med anonyma beteckningar.*

Försök svara så tydligt och fullständigt du kan. Använd egna ord och kan du förklara något på flera sätt så gör det. Kan du inte förklara något allmänt försök i stället att ge ett exempel. Om du behöver mer plats använd baksidan.

Namn:________________________________ **Klass:** __________

1. **Vad är matematik ? Förklara kortfattat med egna ord.**

2. **Vad tycker du om matematik ? Förklara t.ex. i termer som roligt - tråkigt, lätt - svårt osv. Om du har ändrat inställning till matematiken i grundskolan förklara när och varför du gjort det.**

3. **Vad är algebra?**

4. **Vad tycker du om algebra ? Förklara gärna varför du tycker som du gör.**

5. **Förklara i ord hur man löser ekvationen $4x + 35 = 95 - x$. Tänk dig att du skall hjälpa en kamrat som inte kan lösa ekvationer.**

6. **Vi skriver $y = x + 5$. Vad menar man med det? Hur hänger t.ex. x och y ihop ? Förklara gärna på mer än ett sätt.**

D. Diagnostiskt test i algebra för NV2

Du får inte använda räknare, men du får naturligtvis göra räkningar på kladdpapper. Testet är en uppföljning av algebran i åk 1.

Del 1. *Endast svar. Svara på provbladet.*

1. Lös ekvationerna nedan

   a) 4x - 15 = 75...................

   b) $\frac{x}{5} + 6 = 14$ ....

   c) 2^x -1 = 7........................

   d) x^2 - 6x + 8 = 0.................

2. Låda A väger a kg, låda B väger 50 kg mer än låda A och låda C väger 3 gånger så mycket som låda A. Hur mycket väger

   a) låda B.............................

   b) låda C.............................

   c) låda A + låda B (förenkla svaret)

   ....

   d) alla tre lådorna (förenkla svaret)

   ....

   b) Hur många rader får man för 200 kr ?

   ....

3. * *** ***** ***** **

   fig 1 fig 2 fig 3 fig 4

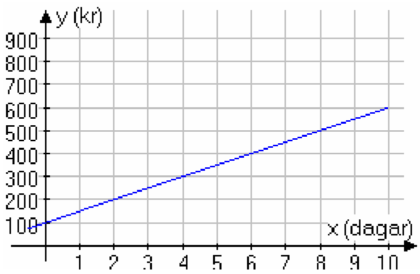
   a) Hur många stjärnor har fig 10 ?

   ....

   b) Hur många stjärnor har fig n ?

   ....

4. Diagrammet visar sambandet mellan kostnaden och antalet dagar då man hyr en cykel.



   Skriv en formel för linjen.

   ....

5. Förenkla uttrycken

   a) y + 3(4 + 3y) + 8

   ....

   b) 10x + 3(4 - 3x) + 8

   ....

   c) 10x - 3(4 - 3x) - 8

   ....

   d) (2x - 5)(3x + 4)

   ....

Del 2. *Lösning lämnas. Skriv på provbladet.*

6. Lös ekvationerna nedan
   a) (3x-8) +(x+3) = 10

   b) 3(20+y) - 2(5+2y) = 40

   c) $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2 = 96$

7. Förenkla uttrycken
   a)) (3x-4)(5-3x) + (2x+3)(-4x+3)

   b) 4(3x-4)(5-3x) - 3(2x+3)(-4x+3)

8. Givet ett tal. Öka talet med 5. Multiplicera därefter summan med 3. Subtraherar du denna produkt från talet 100 blir resultatet 12. Vilket var det givna talet ? Ställ upp och lös en ekvation.

Namn:_______________________

E. Matematikenkät för NV2

Den här enkäten är en uppföljning av den du gjorde i åk1. Avsikten är att kartlägga elevers inlärning i framför allt algebra. Genom att vi får bättre kunskap om detta hoppas vi kunna förbättra matematikundervisningen.

I alla rapporter och andra sammanhang där studien presenteras kommer namnen att plockas bort och ersättas med anonyma beteckningar.

Försök svara så tydligt och fullständigt du kan. Använd egna ord och kan du förklara något på flera sätt så gör det. Kan du inte förklara något allmänt försök i stället att ge ett exempel. Om du behöver mer plats använd baksidan.

Namn:________________________________ **Klass:** __________

1. **Vad tycker du om matematik nu? Förklara t.ex. i termer som roligt - tråkigt, lätt - svårt osv. Förklara gärna varför du tycker som du gör.**

2. **Vad tycker du om algebra och hur tycker du att du klarar algebran?**

3. **Förklara för en kamrat hur man löser ekvationssystemet nedan. Skriv så du tror kamraten kan förstå.**

$$\begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$$

4. **Vi skriver y = 2x + 5. Vad menar man med det ? Hur hänger t.ex. x och y i hop ? Förklara helst på mer än ett sätt.**

F. Sluttest i algebra för NV2

***Hjälpmedel**: Formelsamling*

***Del 1.** Endast svar. Svara på provbladet.*

1. Lös ekvationerna nedan

   a) $4x - 15 = 75 - x$ ....

   b) $\frac{x}{5} - 6 = 14$ ....

   c) $2^x + 1 = 17$ ....

   d) $x^2 + 4x - 5 = 0$ ....

   e) $\sin 2x = 1$, $0 < x < \pi/2$ ....

   f) $\lg x + \lg 2 = \lg 6$ ....

2. I en rektangel är summan av längden och bredden 20 cm. Om längden är x cm, ställ upp en formel för arean A uttryckt i x.

   ....

3. I en rektangel betecknas längden med x och bredden med y. Arean är 100 cm^2 . Ställ upp en formel för omkretsen O uttryckt i x.

   ....

4. Förenkla uttrycken

   a) $3(4 - 3x) + 4(3 - 4x)$
   ....

   b) $3(4 + 3x) - 4(3 - 4x)$
   ....

   c) $(2x - 5)(3x + 4)$

   ....

   d) $\frac{2x^2 - 8}{x - 2}$ ....

***Del 2.** Lösning lämnas. Skriv på provbladet. Behöver du mer plats använd rutat papper.*

5. Lös ekvationerna nedan

   a) $4(x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 39$

   b) $\frac{4}{x - 2} = \frac{2}{3}$

   c) $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

6. Långsidan på en rektangulär gräsmatta är 25 meter längre än kortsidan. Förklara kortfattat vad ekvationen nedan kan betyda.

   $2x + 2(x + 25) = 250$

7. Förklara kortfattat vad som menas med en ekvation.

8. Förklara kortfattat vad som menas med en funktion.

Namn:_______________________

G. Sluttest i algebra för NV3

***Hjälpmedel:** inga*

***Del 1.** Endast svar. Svara på provbladet.*

1. Lös ekvationerna nedan

   a) $4x - 15 = 75 - x$ ....

   b) $\frac{x}{5} - 6 = 14$ ....

   c) $x^x + 3 = 7$ ....

   d) $(x - 3)(2x + 1) = 0$

   ....

2. Förenkla uttrycken

   a) $3(4 - 3x) + 4(3 - 4x)$

   ....

   b) $3(4 + 3x) - 4(3 - 4x)$

   ....

   c) $(2x - 5)(3x + 4)$

   ....

   d) $\frac{2x^2 - 8}{x - 2}$ ....

3. Vad kan man säga om c om c+d=10 och c<d ?

   ....

4. Vilket är störst 2n eller n + 2.? Förklara!

   ....

5. På en skola finns det 9 gånger så många elever som lärare. Ställ upp en formel mellan antalet elever E och antalet lärare L.

   ....

```
* *   * * *   * * * *   * * * * *
      * * *   * * * *   * * * * *
              * * * *   * * * * *
                        * * * * *
fig.1 fig.2   fig.3     fig.4
```

6. Hur många stjärnor finns i

   a) fig. 5 ? ....

   b) fig. 100 ? ....

   c) fig. n ? ....

7. Av en ståltråd med längden 12 cm klipps biten x cm av. Av biten med längden x bildas en cirkel och av den andra biten en kvadrat.
   a) Bestäm cirkelns radie uttryckt i x.

   ....

   b) Bestäm kvadratens sida uttryckt i x.

   ....

8. Äpplen kostar a kr/st och päron b kr/st. Förklara vad uttrycket 3a + 5b betyder.

   ....

   ....

***Del 2**. Lösning lämnas. Skriv på provbladet. Behöver du mer plats använd rutat papper.*

9. Lös ekvationerna nedan

a) $2x^2 + x - 3 = 0$

b) $4(x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 39$

c) $\dfrac{3}{x-2} = \dfrac{2}{3}$

Namn:________________________

H. Matematikenkät för NV3

Den här enkäten är en uppföljning av den du gjorde i åk1 och åk2. Avsikten är att kartlägga elevers inlärning i framför allt algebra. Genom att vi får bättre kunskap om detta hoppas vi kunna förbättra matematikundervisningen.

I alla rapporter och andra sammanhang där studien presenteras kommer namnen att plockas bort och ersättas med anonyma beteckningar.

Namn:______________________________ Klass: ________ Läser Ma E ? ja nej

1. **Vad tycker du om matematik nu, när du strax skall sluta skolan? Förklara t.ex. i termer som roligt - tråkigt, lätt - svårt osv. Förklara gärna varför du tycker som du gör.**

2. **Hur har du upplevt gymnasieskolans matematikundervisning ? Vad har varit bra ? Vad har varit dåligt ? Förbättringsförslag ?**

J. Matematikenkät för NV2 TE2

I den här enkäten har du möjlighet att framföra dina åsikter om matematikundervisningen framför allt i kurserna Matematik C och D. Försök svara så tydligt och fullständigt du kan på de öppna frågorna. Om du behöver mer plats använd baksidan.

I alla rapporter och andra sammanhang där studien presenteras kommer namnen att plockas bort och ersättas med anonyma beteckningar.

Namn: ________________________________ **Klass:** __________

1. **Vad tycker du om matematik som ämne nu?**

   ☐ Mycket tråkigt ☐ Ganska tråkigt ☐ Ganska roligt ☐ Mycket roligt

   Kommentar: ____

   ____

2. **Hur svårt tycker du matematik är nu?**

   ☐ Mycket svårt ☐ Ganska svårt ☐ Ganska lätt ☐ Mycket lätt

   Kommentar: ____

   ____

3. **Anser du att matematik är ett viktigt ämne att kunna?**

   ☐ Inte alls viktigt ☐ Inte så viktigt ☐ Ganska viktigt ☐ Mycket viktigt

   Kommentar: ____

   ____

4. **Är algebraavsnitten (ekvationer, förenklingar, funktioner mm.) viktiga för att klara av matematiken?**

   ☐ Inte alls viktiga ☐ Inte så viktiga ☐ Ganska viktiga ☐ Mycket viktiga

   Kommentar: ____

   ____

5. **Tycker du att lektionstiden för kurserna Matematik C och D (80 h + 80 h) har varit tillräcklig för att klara innehållet i dem?**

   ☐ Alltför kort tid ☐ Något knapp tid ☐ Tillräcklig tid ☐ Alltför lång tid

   Kommentar: ____

   ____

6. **Nämn något bra med den matematikundervisning du fått på gymnasiet.**

   ____

   ____

7. **Nämn något dåligt med den matematikundervisning du fått på gymnasiet.**

   ____

   ____

8. **Hur skulle matematikundervisningen kunna göras bättre?**

   ____

   ____

   ____

   ____

Tack för din medverkan !