Kreativa resonemang på mellanstadiet

Författare: Denice D’Arcy
Stipendiat Gudrun Malmer Stiftelse

Handledare: Peter Bengtsson, Malmö Universitet

Förord

Jag har sedan jag börjat arbeta som lärare haft en vilja att inspirera och stärka elever i min matematikundervisning. Jo Boaler (2017) skriver i boken ”Matematik med dynamiskt mindset” att matematik är det ämne där eleverna kommer med en förutfattad mening om huruvida de är bra eller dåliga, om de kan matematik eller inte kan matematik. Detta kan göra att eleverna låser sig och aldrig kommer vidare i sin matematikinlärning. Jag tror att om eleverna är engagerade och har tilltro till sig själv ändras deras inställning till matematiken och då kommer kunskapen därefter. Därför har jag alltid eftersträvat att min undervisning ska fokusera kring att stärka eleverna i sitt eget lärande. Jag har en ambition om att lära eleverna på ett sätt som gör att de inte bara ska bli en kortvarig ytlig kunskap, utan att de ska kunna förstå, använda och uttrycka sig inom matematiken även längre fram i livet. En utav de saker jag provat för att stärka elevernas tilltro till sig själva har varit genom att låta eleverna själva konstruera lösningar av matematiska problem och utmanat dem att förklara hur de tänker och förklara varför deras lösningar fungerar. Detta har varit ett pågående projekt tillsammans med Jan Olsson i över snart två år och vi har nu kommit så långt att vi systematiskt utvecklat, planerat och utvärderat undervisning som genomsyras av att elever argumenterar för sina egenkonstruerade lösningar.

För att vidare haft möjlighet att kunna genomföra denna typ av utvecklingsarbete vill jag tacka Gudrun Malmers stiftelse och min samarbetspartner Jan Olsson. Jag vill även tacka alla elever som har hjälpt oss på vägens gång.

Innehållsförteckning

1 Problem och frågeställning

I många år har den typ av undervisning i matematik där läraren har genomgång och berättar hur en matematikuppgift ska lösas, elever genomför åtskilliga likadana uppgifter och sedan går läraren vidare till nästa moment, ifrågasatts (Hiebert & Grouws, 2007). Denna typ av undervisning kan innebära att eleverna lär sig en metod och kan genomföra liknande uppgifter men den djupare förståelsen uteblir. Det kan leda till en ytlig kunskap, då läraren ger eleverna lösningsmetoder och eleverna lär sig denna metod utantill, utan att egentligen ha någon förståelse varför. Skolverkets stora satsning Matematiklyftet har delvis varit ett projekt med intentionerna att låta lärare få möjlighet till att utmana denna typ av undervisningsmetod. Vidare att ge lärare en möjlighet att inspireras till att konstruera lektioner och tillfällen där eleverna är mer delaktiga och har större ansvar för att själva konstruera och motivera sina lösningar. Denna syn på undervisning stöds av experimentell forskning som visat att elever som konstruerar och motiverar sina lösningar lär sig bättre än elever som följer en förvisad metod (Jonsson, Norqvist, Liljekvist, & Lithner, 2014; Olsson 2017). I litteraturen finns många generella riktlinjer för hur sådan undervisning kan se ut (se t.ex. Hattie & Timperley, 2007) men det finns inte många konkreta empiriska undersökningar om hur det praktiskt kan genomföras i matematikundervisningen. Det som behövs är tillfällen där elever konstruerar egna lösningsmetoder och formulerar argument istället för att lära sig följa och genomföra procedurer.

När elever ska konstruera egna lösningsmetoder behöver de föra ett resonemang för att komma fram till en lösning. De behöver även kunna motivera och argumentera för varför lösningsmetoden de valt fungerar och även här behöver eleven kunna föra ett resonemang. I vårt projekt använder vi oss av Lithners (2008) definitioner på hur olika typer av resonemang skiljer sig åt. Han skiljer på imitativa och kreativa matematiska resonemang. Ett imitativt resonemang innebär att eleven försöker minnas en inlärd lösningsmetod och försöker sedan kopiera den vid lösning av matematiska problem. Det är vanligt att detta resonemang används när elever undervisats enligt en modell där lärare eller läromedel förmedlar lösningsmetoder. Utmaningen för eleverna blir i detta fall att försöka minnas den memorerade lösningsmetoden. Elever som istället konstruerar lösningsmetoden själva och motiverar dessa på matematisk grund ägnar sig istället åt kreativa matematiska resonemang (Lithner, 2008). Den sistnämnda är projektets grundläggande idé, då vi vill att undervisning ska ge möjlighet för elever att använda sig av kreativa resonemang. Detta eftersom det då är troligt att de når en djupare förståelse för matematik i jämförelse med när de löser uppgifter genom imitativa resonemang. Denna typ av arbetssätt innebär en förändrad lärarroll om läraren inte är van att arbeta med att låta eleverna föra kreativa matematiska resonemang.

En vanlig missuppfattning är att elever som konstruerar egna lösningsmetoder ska klara sig på egen hand utan hjälp av läraren. Tvärtom är läraren aktiv vid undervisningen där problemlösning och resonemang ingår. Läraren har i uppgift att hjälpa elevernas egna tankeprocess med en typ av feedback som samtidigt leder eleven framåt utan att berätta hur eleven ska lösa uppgiften. Läraren måste ge tydliga mål för uppgifter, utmana elever att motivera matematiskt varför en lösningsmetod fungerar och utmana elevers argument för varför en lösning är korrekt. I en ideal situation behöver läraren inte bekräfta elevens lösning om den är rätt eller fel. Istället leder interaktionen lärare-elev till att eleven själv vet om den har gjort rätt eller fel. Utformningen av lärare-elevinteraktion kommer att stödja sig på Hattie och Timperley's (2007) definitioner av formativ feedback. De former som är aktuella är feedback på uppgiftsnivå som innebär att läraren ger instruktioner om hur en viss uppgift ska lösas, vidare att ge eleverna specifika kommentarer om lösningsprocessen. Läraren bekräftar i denna feedbacksform om eleven gjort rätt eller fel. Denna typ av feedback är den som är vanligast förekommande i skolan idag (Hattie 2012). Den andra formen av feedback är feedback på processnivå som innebär att läraren i dialog stödjer den tankeprocess som hjälper eleven fram till en lösning. Feedbackmetoden fokuserar på processen istället för att fokusera på svaren. Exempelvis kan läraren fråga hur eleven tänker eller be eleven att försöka ta reda på om den har gjort rätt eller fel. Sådan feedback leder ofta till bearbetning och eleverna är mer engagerade i lösningsprocessen (Hattie och Timperley 2007).

För att kunna undervisa på ett sätt där eleverna får möjlighet att resonera kreativt och där läraren använder sig av feedback på processnivå är målsättningen med projektet att beskriva principer för lärar-elev-interaktionen. Huvudfokus för projektet *Kreativa matematiska resonemang på mellanstadiet* är hur lärarens och elevernas interaktion bör genomföras för att stödja elevers konstruerande av lösningar och motiveringar utan att avslöja lösningsmetoder, det vill säga stödja lösande av uppgifter genom kreativa resonemang. Projektets syfte är att utveckla principer som stödjer lärares sätt att undervisa, framför allt där elever lär sig matematik genom kreativa resonemang, vilket leder fram till frågeställningarna;

På vilka sätt kan en lärares interaktion stödja elevers konstruerande av lösningar utan att förmedla lösningsmetod?

På vilka sätt kan en lärare utmana elever att motivera och kommunicera sina lösningar på matematisk grund?

2 Litteraturgenomgång

Projektets grundidéer, att elever lär sig matematik genom att konstruera och argumentera för egna lösningar på matematikproblem, bygger på Brousseau´s (1997) ”Theory of didactical situations” (TDS). TDS beskriver hur lärande sker då matematiken får mening när den möjliggör för elever att lösa matematiska problem. Lärarens uppgift blir då inte att förklara hur en uppgift kan lösas utan istället att utmana elevernas lösningar och uppmana dem att formulera argument. Lithners (2008) har konkretiserat detta genom definitioner för olika typer av resonemang. Två huvudtyper är imitativa resonemang (IR) och kreativa matematiska resonemang (KMR) och de bygger på definitionen att resonemang är en kedja av tankar anpassade för att producera påståenden och nå slutsatser i problemlösning (Lithner, 2008 p.257). Denna kedja av tankar kan bli synlig i elevernas yttranden i samband med att de löser matematiska uppgifter genom att resonera.

IR handlar om att minnas och genomföra en procedur som förmodas lösa uppgiften. KMR innebär att eleven på egen hand konstruerar åtminstone delar av de uppgifter de ställs inför och formulerar argument förankrade i matematik (Lithner, 2008). Det gör att lärarens roll är avgörande. Utmaningen består i att stödja elevernas resonemang utan att ge dem lösningsmetoder. En sätt att konkretisera detta är att fokusera på den feedback elever får i samband med att de löser matematikuppgifter. I projektet lyfts två av fyra former av feedback som beskrivits av Hattie och Timperley (2007). De är feedback på uppgiftsnivå och feedback på processnivå. Feedback på uppgiftsnivå handlar om att göra eleven uppmärksam på felaktigheter och föreslå effektiva lösningsmetoder och strategier medan feedback på processnivå är riktat mot elevens tankeprocess som löser uppgiften.

2.1 Imitativa resonemang

Lithner har i flera studier sett att elever ofta har svårigheter att lösa uppgifter där de i förväg inte vet en lösningsmetod (Lithner 2000, 2003). Svårigheterna kan ofta förklaras med att eleverna försöker minnas en inlärd metod som förmodas lösa den aktuella uppgiften. Det kan beskrivas som att eleverna använder imitativa strategier i form av att försöka minnas fakta och lösningsprocedurer istället för att försöka lösa uppgiften genom att undersöka och förstå problemet. Ett exempel kan vara en elev som får i uppgift att lösa uppgiften 5^2 x 5^3 och försöker minnas hur reglerna för att räkna med potenser var. Eleven utgår inte från förståelse för vad potensens olika delar betyder, det vill säga att 5^2 är det samma som 5x5 och 5^3 är 5x5x5. Detta gör att basen kan stå kvar och exponenterna adderas ihop Hade eleven utgått från förståelsen av innebörden hade kanske inte uppgiften varit lika svår att lösa. Elever som uppmuntras till att försöka lösa uppgifter med denna typ av resonemang utvecklar enligt Lithner (2008) IR. Det sker genom att eleverna får arbeta med en mängd uppgifter med hjälp av en metod som läraren eller matteboken förmedlat.

Vidare delar Lithner (2008) in IR i två delar, memorerande (MR) och algoritmiska resonemang (AR). Med MR menas att eleven kommer ihåg ett faktabaserat svar och använder detta som sin lösning. Exempelvis kan eleverna memorera hur många centimeter en meter består av och behöver de inte göra någon beräkning när de får frågan ”hur många cm är 1m”. MR används vid uppgifter som endast kräver att ett svar skrivs ned. Denna typ av resonemang gör att eleverna inte behöver kunna räkna ut någonting utan kan svaret genom att ha memorerat det (Lithner 2008). En algoritm är en begränsad mängd med instruktioner för att lösa en uppgift av en viss karaktär. Vid rätt genomförande leder den till ett korrekt svar. Enklare förklarat är en algoritm en systematisk procedur för hur man genom ett begränsat antal steg utför en beräkning eller löser ett problem (Lithner 2008). AR innebär att elevens strategi för att lösa uppgifter är att minnas memorerade lösningsmetoder. Eleverna kan då komma då ihåg hela procedurer som löser uppgifter utan att behöva först den inneboende matematiken. Exempelvis kan proceduren för att räkna ut arean på en triangel memoreras. Eleverna kan lägga på proceduren på minnet och de vet att de kommer sådana uppgifter på ett prov eller att uppgifter handlar om detta i matteboken. Det brukar fungera i närtid men risken är att kunskaperna blir ytliga och försvinner med tiden. Att identifiera vilken algoritm som är passande att använda för olika uppgifter är ofta svårt för eleverna när de inte övats i närtid (Lithner 2008).

Det finns tre vanliga typer av tillvägagångssätt för att hitta rätt lösningsmetod till uppgiften (Lithner, 2008). Det första kallas *väl bekanta AR*, där eleven har en lösningsstrategi att använda en redan känd algoritm. Eleven väljer en algoritm den känner igen utan att egentligen vara säker på att den löser uppgiften. Ett exempel är om eleverna får uppgiften *Hur stor är arean av en rätvinklig triangel?* Om eleven väljer att räkna basen multiplicerat med höjden dividerat med två utan att formulera argument är det ett väl bekant AR. Risken med detta är att det kan bli fel, exempelvis i fall eleven hade glömt att dividera med två (Lithner 2008). Det andra tillvägagångssättet är avgränsande AR. När eleverna använder sig av detta resonemang väljer eleverna ut några stycken för dem kända strategier och beroende på vilket svar som verkar mest rimligt väljs alternativet ut som slutgiltigt svar. Exempelvis om man ska ta reda arean av en triangel så väljer man mellan proceduren för att beräkna omkrets eller metoden för att beräkna area. Då dessa kan begrepp och metoder kan vara svåra att hålla isär, gissar eleverna vilken av de två som som känns mest rimlig. Följden av detta resonemang är att oförutsägbara svar kan framföras och korrekta svar förkastas (Lithner 2008). Det sista tillvägagångssättet inom IR är guidade AR. Här blir eleverna guidade av antingen en person eller en text. Läraren kan be eleverna att räkna ut den uppställning som läraren gjort för att få fram rätt svar, exempelvis om en elev har svårigheter med uppgiften 5 x 14 guidar läraren genom att fråga ”vad blir 5 x 10?”, vad blir ”5x4?” och vad blir 50 + 20? På detta sätt genomför elever uträkningar genom lärarens guidning utan att behöva argumentera för valen av sina strategier (Lithner 2008)

2.2 Kreativa resonemang

I det tidigare exemplet när en elev löser uppgiften 5^2 x 5^3 skulle lösningen kunna bygga på ett resonemang där eleven först reder ut att 5^2 betyder 5 x 5 och 5^3 betyder 5 x 5 x 5. Tillsammans blir de då 5 x 5 x 5 x 5 x 5 som är 5^5. Sedan argumenterar eleven att vid multiplikation av potenser med samma bas står basen kvar och exponenterna adderas. Det resonemang innehåller en av eleven konstruerad lösningsmetod och argument som är förankrade i matematik. Detta är enligt Lithner (2008) exempel på kreativa matematiska resonemang (KMR). KMR kännetecknas av att eleverna konstruerar en lösning på en på uppgift där de inte känner till någon lösningsstrategi i förväg, argumenterar för sin lösning och har motiveringar grundade i matematiken (Lithner 2008). KMR kännetecknas av följande:

1. En ny resonemangssekvens. Resonemanget ska vara nytt för eleven och leda till att en lösning konstrueras.
2. Rimlighet. Eleven ska kunna argumentera för sitt strategival och motivera varför svaret är rimligt eller korrekt.
3. Matematisk grund. De argument som eleven presenterar ska kunna förankras i matematiken (Lithner, 2008).

KMR visar goda effekter på elevers långvariga lärande. Resultat av en studie från Jonsson et al. (2014) visar att elever som har fått resonera kreativt visar bättre resultat på eftertester än de som resonerat algoritmiskt.

2.3 Feedback på uppgiftsnivå

När eleven behöver hjälp och läraren ger feedback på uppgiftsnivå hjälper läraren eleven med lösningsstrategier och tillvägagångssätt för att eleven ska få rätt svar. Läraren bekräftar även eleven om den har gjort rätt eller fel. Ett problem med feedback på uppgifts nivå kan vara att eleven inte är engagerad av lösningsmetoden då den antagligen inte kommer få exakt samma uppgift att lösa igen och därför inte ser strategierna som användbara (Jönsson 2013).

2.4 Feedback på processnivå

När eleven behöver hjälp och läraren ger feedback på processnivå hjälper läraren eleven i form av att ställa frågor och föra en dialog med eleven utan att berätta lösningsmetoden. Feedback på processnivå är mer övergripande och inte bara kopplad till en specifik uppgift. Med feedbacken vill man istället få eleverna att få förståelse för ett större sammanhang och en djupare förståelse för den matematiska processen så att eleven kan plocka fram kunskapen i nya och andra sammanhang. När det handlar om att stötta elevernas lärande och få kunskapen att sätta sig djupare verkar feedback på processnivå vara en mer gynnsam feedbacksform (Hattie och Timperley 2007).

2.5 Läroplanen

I läroplanen för grundskolan, under syfte för ämnet matematik kan man läsa:

> Undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar kunskaper för att kunna formulera och lösa problem samt reflektera över och värdera valda strategier, metoder, modeller och resultat” (Skolverket 2011, s 56). Vidare skrivs att ”Undervisning ska bidra till att eleverna utvecklar förmågan att argumentera logiskt och föra matematiska resonemang (Skolverket 2011, s 56).

Detta rimmar väl med intentionerna för KMR. Vidare kan samtliga fem förmågor för matematikämnet även knytas an till KMR då de innehåller delar som handlar om att skapa strategier och kunna motivera och argumentera för olika strategier. Nedan följer de fem förmågorna inom matematik:

- Formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder,
- Använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp,
- Välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter,
- Föra och följa matematiska resonemang, och
- Använda matematikens uttrycksformer för att samtala och om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser (Skolverket 2011, s 57).

3 Metod och tillvägagångssätt

Detta projekt bygger på samverkan mellan elever och lärare i det dagliga arbetet och i detta avsnitt kommer metoden beskrivas

3.1 Metodval

För att samla in data till denna studie har ca 80 elever i från olika årskurser deltagit. Det har varit elevgrupper från samma skola. Alla elever har inte varit aktiva i projektet samtidigt utan det har varit olika elevgrupper som varit aktiva vid olika tillfällen. Vid varje tillfälle ombads elever att ljudinspela när de arbetade med olika uppgifter. Denna metod valdes då det är det som sägs som är det primära. Eleverna arbetade två och två och pratade högt kring hur de löste uppgifterna för att i efterhand kunna lyssna på inspelningarna och få insikt hur de löste och tänkte kring uppgifterna. Ljudinspelningarna transkriberades och analyserades.

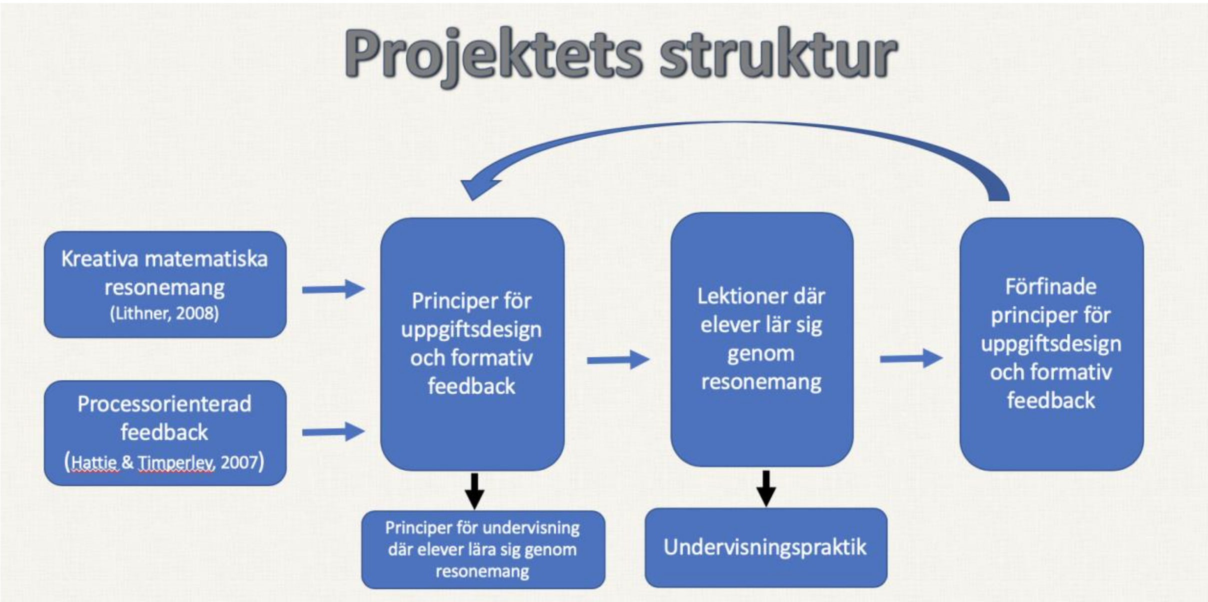
3.2 Urval och etiska principer

De elever som blev ljudinspelade hade alla tillåtelse av sina vårdnadshavare att vara med i projektet. Bara de elever som ville blev inspelade. De elever som inte ville eller inte hade tillåtelse av sina vårdnadshavare att delta genomförde samma uppgifter fast utanför projektets dokumentation. För att skydda elevernas anonymitet nämns inga namn på elever, skola eller kommun. Istället utgör de olika eleverna en bokstav i transkripten. Vidare är det bara de inblandade i projektet som har tillgång till och kan lyssna på ljudinspelningarna.

3.3 Projektstruktur

Projektets syfte är att utveckla principer som stödjer lärares sätt att undervisa, framför allt där elever lär sig matematik genom kreativa resonemang.

De frågor som kommer att vägleda arbetet är: (1) *På vilka sätt kan en lärares interaktion stödja elevers konstruerande av lösningar utan att förmedla en lösningsmetod?* (2) *På vilka sätt kan en lärare utmana elever att motivera och kommunicera sina lösningar på matematisk grund?*



Projektet har två resultat då det drivs som både ett utvecklings - och forskningsprojekt. Detta gör att kravet som ställts på metoden varit att producera data både för teoribildning och utveckling av undervisningspraktiken. Metoden som använts för detta projekt är inspirerad av Design-based-research, vilket i praktiken innebär att fokus ligger på vad som vägleder designen av undervisningen. För att tydligt visa vad som inspirerar designen är ett sätt att beskriva det utifrån principer (Linn et al., 2004). Bell et al. (2004) beskriver principer som ett mellanting mellan generaliserbara och replikerbara vetenskapliga rön och insikter i en verksamhet. I ett design-based-project etableras inledande principer för att planera undervisning varefter de testas med hjälp av empiriska erfarenheter, det vill säga ifall undervisningen ger det planerade utfallet. Efter varje gång principerna använts utvärderas de i fall de behöver justeras och ifall de behöver kompletteras med nya. I projektet Kreativa resonemang på mellanstadiet formulerades inledande principer med stöd av Lithners (2008) definitioner för kreativa matematiska resonemang och Hattie och Timperleys (2007) definitioner för processorienterad feedback. Principerna har sedan utvecklats via ett 30-tal lektioner.

För att förstå hur metoden genomförts beskrivs processen nedan (ett förtydligande av bilden ovan som visar projektets struktur).

1. De första principerna som användes för projektet formulerades utifrån Lithners (2008) definition av kreativa matematiska resonemang och Hattie och Timperleys (2007) definition av processorienterad feedback.

2. De inledande principerna användes för att planera undervisning och lektionsaktiviteter där eleverna uppmuntras att konstruera egna lösningsmetoder och att formulera argument för lösningarna.

3. Elevers lösningar och svårigheter förutsågs och till varje uppgift och moment formulerades feedback på processnivå.

4. Transkriberingar av inspelningar med lärare och elever analyserades med avseende på om och i så fall vilka principer som användes av läraren. I samband med detta analyserades också elevernas resonemang som kreativt eller algoritmiskt.

5. Principerna utvärderades med avseende på om de ledde till att eleverna resonerade kreativt vid alla aspekter av Lithner definition, d.v.s. om de stödjer elevers egna konstruktioner av lösningar, elevers argument för lösningsmetoden och de verifierande argumenten för löningen. Vid behov justerades formuleringarna, nya principer lades till och de som inte ansågs nödvändiga togs bort.

2-5 genomfördes upprepade gånger och för varje gång användes de utvecklade principerna enligt 5.

För att kunna analysera resultatet valdes delar av transkript ut och en diskussion fördes kring huruvida eleverna resonerade kreativt eller ej, var eleverna befann sig i sin problemlösning och vilken typ av feedback som då gavs.

4 Resultatredovisning

4.1 Inledande sondering av möjligheterna att designa undervisning för kreativa resonemang

Under de senaste 2 åren har 12 lektionsserier med sammanlagt 33 lektioner planerats och genomförts i syfte att undersöka om designen leder till att eleverna resonerar kreativt. Lektionerna har analyserats med målsättningen att kunna utforma stöd för hur läraren ska interagera med eleverna för att uppnå målsättningen för projektet. Planeringen av lektionerna har innefattat design av uppgifter och utformning av feedback kopplade till uppgifterna.

I det inledande arbetet designades med stöd av Lithner (2017) uppgifter som förväntades innebära att eleverna behövde resonera kreativt, det vill säga konstruera en egen lösning samt formulera argument för lösningen med förankring i matematik. Möjliga vägar till lösningar, möjliga problem för eleverna som eleverna kunde stöta på och vad som var avgörande för att nå en lösning förutsågs. Utifrån Hattie och Timperley (2007) utformades feedback som inriktade sig mot elevernas tankeprocess till de problem som eleverna kunde stöta på. Detta var sedan underlag för interaktionen med eleverna när de löste uppgifterna.

Efter att genomfört ett antal uppgifter visade det sig att det var viktigt att eleverna försökte berätta hur de uppfattade uppgiften. Vi bestämde då att den första frågan alltid skulle vara ”berätta hur du har tänkt”. I början hade eleverna förväntningar på att få veta hur de skulle göra men efterhand blev de vana och mer bekväma med att förklara hur de uppfattade uppgiften. Det visade sig också att det ofta behövdes feedback för att uppmuntra eleverna att argumentera för sin lösning. I transkripten från inspelningarna kunde vi se att frågor som ”berätta hur du kommit fram till lösningen” och ”är du säker på att svaret är rätt” ofta ledde till att eleverna formulerade argument. Flera av uppgifterna har varit av typen *Rika problem* som bland annat innebär att de olika deluppgifterna har olika svårighetsgrad men handlar om samma tema och grundläggande matematiska idéer. Där har vi upptäckt att om eleverna ber om hjälp med de svårare deluppgifterna kan feedback riktas mot de enklare som eleven redan löst. Frågor som ”Hur tänker ni här” och ”Varför fungerar er metod” ledde ofta till att eleverna kom fram till en generell metod som de kunde uppmuntras att använda för att testa sina försök på de svårare deluppgifterna.

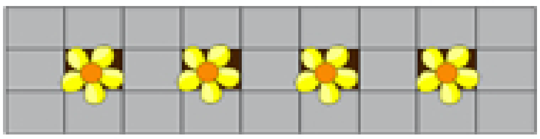
Efterhand blev planeringarna alltmer omfattande och detaljerade. Behovet att sammanfatta erfarenheterna som riktlinjer blev uppenbart. Med stöd av tidigare analyser om vilken feedback som fungerat under tidigare lektioner formulerades inför den 4:e lektionsserien följande riktlinjer för lärar-elev-interaktioner:

- Rikta feedback mot enklare deluppgifter
- Utmana elever att förklara varför deras lösning fungerar.
- Utmana elever att komma fram till den generella lösningsmetoden
- Uppmuntra eleven att kontrollera sina lösningar med den generella metoden

Riktlinjerna är fortfarande uppgiftsspecifika i och med att de är anpassade till *Rika problem* men betydligt mer generella än den detaljerade vägledningen i tidigare planeringar. Dessa riktlinjer låg till grund för den 4:e lektionsserien som handlade om samband och förändring. I följande avsnitt presenteras resultaten från uppgiften Blommor och plattor (se bilaga x).

4.2 Intervention Blommor och plattor

Uppgift:

Till höger finns en bild på blommor och plattor i en rabatt. För 4 blommor behövs 23 plattor.	

1. Hur många plattor behövs om det är 5 blommor?

2. Hur många plattor skulle det vara om det istället är 10 blommor?

3. Hur många plattor skulle det vara om det var 100 blommor?

4. Kan du komma på ett sätt att räkna ut antal plattor med vilket antal blommor som helst?

5. Prova på ett valfritt antal blommor om ditt sätt att räkna fungerar?

Uppgiften är designad med avsikten att deluppgifterna ska kunna lösas med samma grundförståelse, att de har stegrande svårighetsgrad och att det ska gå att komma fram till en generell metod som fungerar på alla deluppgifter. Bärande idéer är att alla elever ska kunna lösa den inledande deluppgiften och att alla elever ska möta en utmaning. Det avgörande för att lösa uppgiften alla delar bedömdes vara att upptäcka att antalet plattor ökar med 5 för varje blomma och att det alltid behövs 3 extra plattor för första blomman. Eleverna i följande exempel har löst deluppgiften för 5 blommor korrekt. På deluppgiften för 10 blommor har de svarat 56 vilket är fel och på deluppgiften med 100 blommor har de kommit fram till 560 vilket också är fel. De vill nu ha hjälp med att lösa sista deluppgiften, den där de ska komma på en generell metod som beräknar antal plattor med olika antal blommor. Då sker följande interaktion:

1. Lärare: Hur gjorde ni för att lista ut den här till exempel? Den första?
2. Elev 1: Vi räknade.
3. Lärare: Ni räknade. Okej. Och vad såg ni då att…?
4. Elev 1: Att… att jag kan ju inte r… för att… om… ja den här går ju till 4
5. Lärare: Mm

Eftersom en av riktlinjerna säger att feedback ska riktas mot en enklare uppgift uppmuntrar jag på rad 1 eleverna att berätta hur de löste den första deluppgiften. Elevernas yttrande på rad 2 och 4 är fragmentariska men istället för att ta över och förklara uppmuntrar jag på rad 3 eleverna att fortsätta förklara och på rad 5 bekräftar jag att jag lyssnar utan att förmedla något som bidrar till lösningen på uppgiften. Det leder till fortsättningen:

6. E: … så att jag satte till fem stycken
7. L: Mm
8. E: … och då så blev det fem blommor…
9. L: okej och om du hade gjort en blomma till hur många plattor till hade du satt då?
10. E: Ja då hade jag ju satt dit fem till
11. L: Fem till. Om du hade satt dit en blomma till. Hur många hade du satt dit då?
12. E: Fem. Fem, fem, fem, fem…
13. L: okej så där har du kommit fram till nånting. Vad har du kommit fram till?

På rad 6 uttrycker eleven den för lösningen viktiga komponenten att det ökar med 5 för varje blomma. Här skulle jag kunnat bekräfta att det var viktigt och talat om varför men det hade troligen hindrat eleverna att både konstruera lösningsmetoden och formulera argument för denna. Istället avvaktar jag på rad 7 och på rad 9 och 11 uppmuntras eleverna att fortsätta formulera på vilket sätt ”det ökar med 5” är viktigt. Viktigt här är att det inte är jag som bidrar med det som är viktigt för att lösa uppgiften utan eleverna. På rad 12 ser det ut som att elev 1 har kommit fram till att det ökar med 5 plattor för varje blomma. På rad 13 bekräftar jag att eleven har kommit fram till något men fortfarande utan att bidra med något matematiskt som löser uppgiften utan fortsätter att uppmuntra eleverna att berätta hur den resonerar. Interaktionen fortsätter:

14. L: Så om det vore 8 blommor… hur många plattor behövs då…
15. E: (paus)… 40… 8 gånger 5 är 40… och sen måste man lägga till 3… 43.
16. L: kan du beskriva hur man räknar ut antal plattor för vilket antal blommor som helst…
17. E: Man tar så många blommor man har och gångar med 5… sen lägger man till 3… därför att annars finns inte den här raden (pekar på de första tre plattorna).
18. L: Nu har ni kommit fram till en regel… kan ni kontrollera era svar med den.
19. E: (räknar för 10 och 100)… de här är fel... Det ska vara 53 och 503…
20. L: Varför blev det fel.
21. E: Därför att vi tog 3 extra plattor för varje 5.

Min feedback på rad 14 ger eleverna möjlighet att uttrycka och testa sitt resonemang, fortfarande utan att bidra med lösningsmetoden. Elev 1 konstruerar på rad 15 lösningen för 8 plattor. Jag bekräftar inte heller nu att lösningen är korrekt (rad 16) utan utmanar istället eleverna att komma fram till den generella lösningen (som är en av riktlinjerna). På rad 17 konstruerar elev 2 den generella lösningen och formulerar ett argument för varför man lägger till 3. På rad 18 bekräftar jag att eleverna kommit fram till en regel men inte att den är korrekt. Istället uppmanar jag eleverna att använda regeln för att kontrollera sina svar (en av riktlinjerna). De leder till att eleverna på rad 19 konstaterar att deras tidigare svar varit fel. På rad 20 frågar jag varför (en av riktlinjerna) och eleverna formulerar argument för varför de blev fel (rad 21).

Sammanfattningsvis kan sägas att samtliga riktlinjer för lärar-elev-interaktionen har använts och att eleverna konstruerat lösningen och formulerat argument för denna med förankring i den matematik som ingår i uppgiften, dvs de har fört ett kreativt resonemang. Det är rimligt att anta att detta beror på att jag som lärare inte avslöjar hur uppgiften ska lösas utan istället uppmuntrar eleverna att uttrycka hur de tänker. Vidare visar transkriptet att jag behöver bekräfta att eleverna är på rätt väg på rad 13 och 18. Då är det viktigt dels att ha god överblick i vad för matematiskt innehåll som är viktigt för lösningen och att vara beredd att formulera sig så att inte lösningsmetoden avslöjas. Om läraren inte är insatt i det matematiska innehållet måste den själv komma fram till det i stunden vilket kan hindra elevernas process och risken finns att läraren inte klarar av att ge feedback som stöttar elevernas tankeprocess utan istället visar eleverna hur uppgiften kan lösas.

Genom att låta elever berätta om uppgifter de löst riktas fokus mot elevens resonemang. Ofta uttrycker eleverna delar av ett resonemang. Då är det viktigt att inte läraren tar över resonemanget utan istället antingen som på rad 3 uppmuntrar eleverna att utveckla resonemanget eller som på rad 7 avvakta och ge eleven tid genom att visa att man lyssnar. Det är också viktigt att vara uppmärksam på när eleverna uttrycker sådant som är viktigt för lösningen och att då uppmuntra eleverna att berätta mer utan att bekräfta eller avslöja lösningsmetoden (rad 9, 11, 13, och 18)

Efter att ha analyserat och utvärderat lektionsserie 4–6 vidareutvecklades riktlinjerna med målsättningen att bli mer generella och användbara i undervisning inom alla områden i matematik. De formulerades som följer:

- Uppmana eleven att berätta hur den tänker.
- Utmana eleven att berätta varför en lösningsmetod fungerar.
- Utmana eleven att kontrollera sina svar.
- Uppmana elever att uttrycka vad de förstår (aldrig tolka eller fylla i deras påbörjade resonemang).

Dessa riktlinjer användes för att planera lektionsserie 7 *Cirkelns omkrets och area* som presenteras i nästa avsnitt.

4.3 Intervention Cirkelns omkrets och area

Uppgift:

1) Undersök med https://ggbm.at/qJtcamNS olika omkretsar, radier och diametrar. Anteckna vilken omkrets som hör till vilken radie och diameter.

2) Undersök förhållandet mellan först diameter och radie och sedan omkrets och diameter på några olika stora cirklar. Anteckna vad du kommer fram till.

3) Vad kan du använda det du kommit fram till i uppgift 2. Förklara hur du tänker! Formulera några uppgifter som kan lösas genom de samband du kommit fram till.

Målsättningen med lektionerna var att eleverna genom kreativa resonemang skulle komma fram till formlerna för cirkelns omkrets och area. En möjlig väg dit bedömdes vara att undersöka förhållandet mellan omkrets – diameter samt area - radie på flera exempel med olika stora cirklar. För att få tillgång på exempel gjordes med GeoGebra en webapplikation där eleverna själva kunde variera storleken på en cirkel. I applikationen visades information om radie, diameter, omkrets och area. Vi bedömde att eleverna hade tillräckliga kunskaper om cirkelns grundläggande begrepp men att de behövde utveckla kunskapen om hur man kan undersöka förhållanden mellan tal. Därför gjordes en inledande lektion där eleverna fick resonera kring olika exempel där man kan utnyttja förhållande mellan tal. Denna lektion innehöll ingen geometri. När eleverna sedan arbetade med uppgifterna om cirkelns omkrets och area lyckades de ganska snart komma fram till att förhållandena mellan omkrets och diameter samt mellan area och radiens kvadrat alltid var 3,14. I följande exempel visas hur detta gick att utgå ifrån när de skulle komma fram till en formel för att beräkna cirkelns area. Eleverna har (inte korrekt) kommit fram till att radien x 3,14 är lika med arean.

1. E1: Är radien gånger 3,14 arean?
2. L: Vad var det ni räknade ut för någonting…
3. E1: Förhållandet….
4. L: Förhållandet mellan vadå…
5. E1: Diametern…
6. L: Förhållandet mellan…

7. E1: Förhållandet mellan… radien
8. E2: Förhållandet mellan en cirkels area…
9. L: Förhållandet mellan en cirkels area…
10. E1: Förhållandet mellan en cirkels area och radiens kvadrat…
11. L: Precis… det var det ni räknade ut…

Eftersom eleverna har kommit fram till 3,14 är det rimligt att tänka att de gjort rätt men uttryckt sig fel. Istället för att korrigera dem följer jag riktlinje att *uppmuntra eleverna att berätta hur de tänkt* (rad 2, 4, 6). Genom att upprepa vad de uttrycker kan de fortsätta sitt eget resonemang istället för att jag fyller i det. På rad 10 utrycker eleven den beräkning de verkligen gjort. På rad 11 bekräftar jag detta. Jag skulle kunnat utmana eleven enligt riktlinjen *berätta varför lösningsmetoden* fungerar men å andra sidan var fokus på interaktionen att eleverna skulle komma fram till formeln för cirkelns area. I den fortsatta konversationen fortsätter eleverna att utveckla sitt eget resonemang.

12. E2: Vi tog radien… 4…. Och då är alla sidor lika långa…. Så arean är 4 x 4… 16
13. E1: Sen tog vi cirkelns area och delade… sen gjorde vi lika på de andra…
14. L: och vad såg ni då…
15. E1: Det blev lika på alla…. Det blev 3,14
16. L: Precis… det blev pi…
17. E1: Då är arean radiens kvadrat gånger pi…

På rad 12 och 13 förtydligar eleverna hur de kommit fram till att förhållandet mellan cirkelns area och radiens kvadrat alltid är 3,14. På rad 14 uppmuntrar jag eleverna *att uttrycka det som de förstått*. Rad 16 bekräftar jag elevernas resonemang och det leder till att de på rad 17 uttrycker muntligt formeln för hur man beräknar area på en cirkel. Sammanfattningsvis ser det ut som om riktlinjerna att uppmana eleven att berätta hur den tänker och uppmana eleven att uttrycka hur den förstår har följts och möjliggjort för eleverna att uttrycka delar av kreativa resonemang. Däremot har eleverna inte direkt utmanats att berätta varför deras lösningsmetod fungerar och inte heller direkt uppmanats att kontrollera sina svar. Detta medförde att vi förtydligade riktlinjerna samt att vi införde förkortningar i syfte att kunna enklare koda transskript och få en överblick ifall alla riktlinjer finns med. Riktlinjerna som nu började benämnas som principer formulerades som följer:

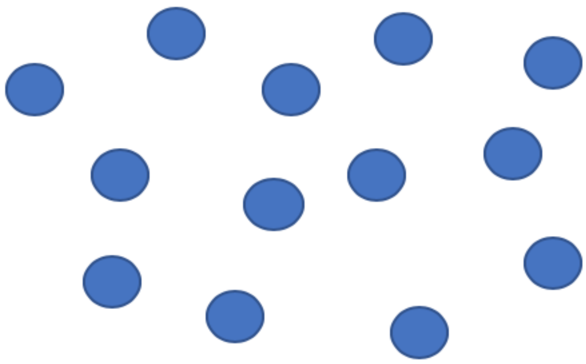
- **P1 -** Ta reda på hur eleverna tänker. Det innebär att läraren inte kan acceptera frågor där eleven inte är specifik med vad som är problematiskt. Uppmana elever att uttrycka vad de förstår (aldrig tolka eller fylla i deras påbörjade resonemang).
- **P2 -** Var noggrann med att elever alltid uttrycker vad de förstått med egna ord även om allt tyder på att de har förstått. Det innebär att läraren inte fyller i eller tolkar det som inte sägs. (när eleverna har en tanke man som lärare förstått).
- **P3 -** Utmana eleverna att förklara varför/varför inte delar av och/eller hela lösningen fungerar och ger rätt svar. Det kan ses som motsatsen till att läraren bekräftar eller avvisar en lösning.
- **P4 -** Utmana eleverna att finna ett sätt att testa sin lösning

Dessa principer var nu underlag för lektionsserie 9 och 10 som presenteras i kommande avsnitt.

4.4 Interventioner taluppfattning och skriftliga beräkningar

Uppgift 1:

a) Vilket tal visas med prickarna?



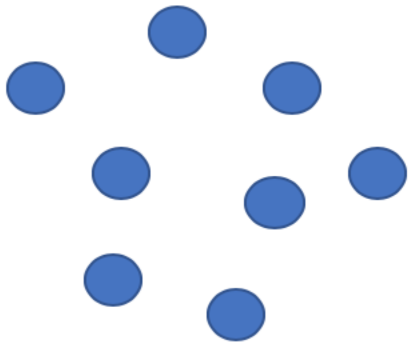
b) Sortera prickarna så att de visar hur talet är uppbyggt.

Från och med lektionsserie 9 är det nya elever som går i årskurs 4. De första lektionerna handlade om taluppfattning och skriftliga beräkningar. Målsättningen var att eleverna skulle vara säkra på hur tal i tiosystemet är uppbyggda och kunna tillämpa det vid skriftlig addition. Innan följande exempel har eleverna diskuterat vad som menas med tal och hur det kan kopplas till en bild med 13 prickar som visas utan systematik. De vill ha hjälp med att förstå vad som menas med frågan ”Vilket tal visas med prickarna” och ”Sortera prickarna så att de visar hur talet är uppbyggt”. Grundidén för elev-lärarinteraktionen är att inte förklara för eleverna utan istället uppmuntra dem att resonera sig fram till en egen lösning. I transkriptet är också markerat vilken av principerna P1-4 som används.

1. E1: Alltså vi behöver hjälp
2. L: Ja, hur tänker ni då? (P1)
3. E1: Vi tänkte att det är 13 prickar, är det fel?
4. L: Vad tycker du, är det 13 prickar? (P2)
5. E1: Ja det har vi men sen står det här sortera prickarna så att de visar hur talet är uppbyggt
6. L: Om vi tittar på talet… du har ju skrivit 13 där…. Hur är det uppbyggt? (P2)
7. E2: Det är ett ojämnt tal….
8. L: Är det något mer? (P2)
9. E1: sex sju sex… 6+7…. Har man förklarat det då…
10. L: så kan man ju också tänka…. Men om tittar på själva talet (P1)
11. E2: Tio och tre
12. L: Hur tänker du då? (P2)
13. E2: För att det är ju 10 och 3…. Ettan är värd 10 och trean är ju för 1….
14. L: Vad tycker du (E1) om det?
15. E1: Ja

Uppgift 2:

a) Lägg sedan till dessa prickar till talet i 1b. Vilket tal har du nu?



Utifrån bedömningarna av vilken princip som följs kan det tolkas som att rad 2 uppmanar eleven att uttrycka det egna resonemanget, vilket inte skett ifall jag förklarat hur eleven skulle svara på frågan. På rad 3 uttrycker eleven att den har förstått att det tal som söks är 13 men istället för att bekräfta så uppmuntras eleven på rad 4 att utveckla sitt resonemang. På samma sätt uppmuntras eleverna på rad 6 och 8 att förklara hur de förstår. Rad 10 bedöms som P1 eftersom eleverna uppmuntras att börja på en ny tankeråd. Elevernas svar på rad 11 utvecklas efter frågan på rad 12 till att uttrycka vad de olika siffrorna i talet 13 står för. Något som blir tydligt i detta exempel är att endast princip 1 och 2 används. Det kan sättas i samband med att eleverna inte heller uttrycker ett fullständigt kreativt resonemang då de inte formulerar argument för sin lösning. Möjligheter fanns på rad 14 att ställa frågan varför det som eleven säger på rad 13 stämmer (P3) som skulle kunna leda fram till att eleverna motiverar sin lösning som i sin tur skulle kunna följas upp med en uppmaning att testa om argumenten fungerar med ett annat tal (P4).

I följande exempel…

1. L: Vad står det … vad ska man göra? (P1)
2. E: Berätta vad som händer i uträkningen
3. L: Ja vad är det som händer … hur har ni gjort … hur räknade ni ut det? (P1)
4. E: Vi plussade 13 plus 8 … ska vi skriva det.
5. L: Om det var det ni gjorde … men vad händer i uträkningen … vad är det som händer här … ni beskrev den här … ni beskriver som att ni har ett 10-tal och tre 1-tal … vad händer här då … hur många 10-tal har vi där? (P2)
6. E: två
7. L: hur kommer det sig att det blir två då? (P3)
8. E: 13 + 8 … att det är plus
9. L: Ja … precis så talet blir större … vad händer med den ettan (10-talet i 13) … varför blir den plötsligt en tvåa (P3)
10. E: 10+10 är 20 …

Fortfarande saknas P4.

P4 har två funktioner, dels uppmuntras eleverna att verifiera sin lösning genom att formulera argument för varför den fungerar, dels befästa de kunskaper och färdigheter resonemanget lett fram till. Följande exempel är från en helklassdiskussion som följer upp pararbete där eleverna jobbat med skriftlig multiplikation. Målsättningen har varit att eleverna ska både förstå och kunna tillämpa multiplikationsalgoritmer. Under diskussion varför en algoritm fungerar uppstår frågan om man måste följa en viss ordning för att algoritmen ska fungera:

1. Elev: Ska man börja nerifrån och upp eller uppifrån och ned?
2. Lärare: Vi kollar… vad ska vi börja med… nerifrån och upp eller uppifrån och ned… (P4)
3. Elev: jag tycker nerifrån och upp
4. Lärare: Ok… 3 gånger 4…
5. Elev: 12…
6. Lärare Jag skriver ut det… sen tar vi 3 gånger 3 (pekar på den nedre 3:an) eftersom det var nerifrån och upp…
7. Elev: Sen lägger man till 1:an så det blir 10
8. Lärare: ok… det var nerifrån och upp… nu tar vi tvärtom… uppifrån och ned… 4 gånger 3…
9. Elev: Det är 12
10. Lärare: 3 gånger 3…
11. Elev: 9… det blir 10
12. Lärare: Vad var svaret på frågan… spelar det någon roll om man tar nerifrån och upp… eller uppifrån och ned? (P4)
13. Elev: Nej
14. Lärare: Nej, det spelar ingen roll

Enbart detta utdrag kan ge intrycket att jag som lärare leder elevernas resonemang men det har föregåtts av flera exempel där elevernas vägar fram till lösningen varit i fokus. När frågan om man istället för att börja nerifrån kan börja uppifrån uppstår har eleverna redan visat att de både förstått och kan genomföra den skriftliga multiplikationsalgoritmen. Därför väljer jag att fokusera på frågan som kan tolkas som ett test av resonemanget ifall det inte stämmer i vissa situationer. Det är också därför vi ser denna interaktion som P4, att eleverna utmanas att testa sina lösningar.

P1, att ta reda på hur elever tänker är ett sätt att uppmuntra elevernas eget resonemang i motsats till att förklara för eleverna hur de kan tänka. Formuleringen av P2, att eleverna ska uttrycka det som de förstår, innebär i praktiken att uppmana eleverna att utveckla sina egna resonemang istället för att ta över eller ersätta deras påbörjade resonemang. P3, att utmana eleven att förklara varför deras lösning fungerar eller inte, handlar om att eleverna ska motivera det egna resonemanget istället för att läraren ska bekräfta eller avvisa elevens resonemang. Alltså ska läraren uppmuntra eleven att motivera det egna resonemanget. När elever löst en uppgift finns möjligheter att låta dem kontrollera och befästa sina kunskaper. Det kan ske dels genom att undersöka om lösningen är korrekt och dels genom att testa resonemanget på liknande uppgifter. P4 kan beskrivas som att uppmuntra eleverna att testa resultatet av sina resonemang.

4.5 Sammanfattning

Projektets målsättning har varit att utveckla principer som stödjer lärares sätt att undervisa så att eleverna lär sig genom kreativa matematiska resonemang, det vill säga att de konstruerar egna lösningar på matematikuppgifter och att de formulerar argument för sina lösningar. Genom att utgå från grundläggande teorier om resonemang (Lithner, 2008) och feedback (Hattie & Timperley, 2007) har konkreta riktlinjer utformats och testats ni undervisning. Utvecklingen av de inledande instruktionerna via mer generella riktlinjer till principer har empiriskt stöd i och med att de hela tiden testats i autentiska undervisningssituationer. Detta innebär att den undervisning vi kommit fram till vilar på vetenskaplig grund och beprövad erfarenhet.

Efter lektionsserie 12 har erfarenheterna sammanställts som 4 principer. Den bärande idéen för principerna är att om de tillämpas kommer det att leda till att eleverna lär sig matematik genom kreativa matematiska resonemang. Genom hela projektet har analyserna av lärar-elev-interaktionerna visat att uppmaningen till eleverna att berätta hur de tänker ofta får dem att uttrycka hur de tagit sig an uppgiften och börjat konstruera en lösningsmetod. Det kan tolkas som att det är viktigt att eleven får möjlighet att uttrycka ett självständigt resonemang. När eleven väl uttryckt en början på ett resonemang får läraren inte ta över och slutföra det. Istället ska eleven uppmuntras att utveckla sitt resonemang. När eleven kommit fram till en lösning har vi sett att läraren inte behöver tala om ifall lösningen är rätt eller fel. Istället kan eleven uppmanas att motivera sin lösning. Något som också visat sig vara viktigt är att eleven får möjlighet att testa sitt resonemang. Resultaten visar att när alla de här delarna finns med så medför det att eleverna resonerar kreativt. Som stöd för att planera och genomföra undervisning för kreativa resonemang har vi formulerat följande principer:

Läraren ska i sin interaktion med eleverna uppmuntra dem att:

P1 - uttrycka ett självständigt resonemang - Ta reda på hur eleverna tänker. Det innebär att läraren inte kan acceptera frågor där eleven inte är specifik med vad som är problematiskt. Uppmana elever att uttrycka vad de förstår (aldrig tolka eller fylla i deras påbörjade resonemang).

P2 - utveckla det egna resonemanget - Var noggrann med att elever alltid uttrycker vad de förstått med egna ord även om allt tyder på att de har förstått. Det innebär att läraren inte fyller i eller tolkar det som inte sägs. (när eleverna har en tanke man som lärare förstått).

P3 - motivera det egna resonemanget - Utmana eleverna att förklara varför/varför inte delar av och/eller hela lösningen fungerar och ger rätt svar. Det kan ses som motsatsen till att läraren bekräftar eller avvisar en lösning.

P4 - testa resultatet av det egna resonemanget - Utmana eleverna att finna sätt att testa sin lösning

Dessa principer ska inte ses som någon slutpunkt. Självklart kan de utvecklas vidare och anpassas efter olika lärares behov. Vad som inte framgår av projektets resultat är att undervisning som bygger på dessa principer ställer krav på strukturen på lektioner och att eleverna måste skolas in ett arbetssätt som de kanske inte är vana vid. I slutdiskussionen kommer frågor om hur de 4 principerna kan implementeras i vardaglig undervisning att behandlas.

5 Slutdiskussion

Frågeställningarna som funnits genom hela projektet har varit *”På vilka sätt kan en lärares interaktion stödja elevers konstruerande av lösningar utan att förmedla lösningsmetod?”* och *”På vilka sätt kan en lärare utmana elever att motivera och kommunicera sina lösningar på matematisk grund?* Slutsatsen som kan dras utifrån resultatet är att läraren genom att få eleven att uttrycka ett eget resonemang, utveckla det egna resonemanget, motivera det egna resonemanget och testa resultatet av det egna resonemanget hjälper eleven att lösa olika typer av uppgifter utan att förmedla lösningsmetoden, likaså får läraren på detta sätt eleven att motivera och kommunicera sin lösning. I resultatet syns att läraren inte alltid behöver ge feedback utefter alla fyra principer för att leda eleven framåt utan ibland räcker feedback grundat i en eller två principer, beroende på i vilken situation eleven behöver hjälp.

Ett bidrag från projektet är att det är ett exempel på vad som krävs för att implementera resultat från grundläggande forskning i vardaglig undervisning. Att kreativa matematiska resonemang är positiva för lärande i matematik har visats i experimentella studier där stora delar av den vardagliga undervisningens komplexitet har reducerats. Till exempel så har i dessa studier inga lärar-elev-interaktioner ingått. De teorier om processorienterad feedback vi använt har formulerats med stöd av systematiska litteraturstudier över forskning om feedback. Det har medfört att teorierna är generellt formulerade och måste anpassas till lokala förutsättningar om de ska implementeras i vardaglig undervisning. Att anpassa resultat från grundforskning till vardaglig undervisning är därför inte enkelt. Vårt val har varit att formulera riktlinjer som följts och kontinuerligt utvärderats och utvecklats med målsättningen att de ska kunna uttryckas som lättförståeliga principer. Dessa principer blir då länken mellan forskningsrön och tillämpad undervisning. Om principerna följs kommer också de grundläggande forskningsrönen att implementeras i undervisningen. I vårt fall innebär det att eleverna lär sig matematik genom kreativa resonemang.

I följande stycken kommer möjligheterna att utforma konkret undervisning med stöd av de 4 principerna att diskuteras.

Planering

När det handlar om den konkreta planeringen finns två delar att tänka på: uppgiftens design och lärar-elevinteraktionen. Här kopplas principerna till den aktuella uppgiften och hur eleverna förväntas konstruera lösningen till den. När det handlar om uppgiften gäller det att se vilka förutsättningar den erbjuder med avseende på varje princip. Vidare behöver uppgifterna vara tillräckligt utmanande men samtidigt på en nivå som eleven förväntas att på egen hand kunna påbörja en lösning. När planeringen av uppgiften är gjord behövs lärar-elevinteraktionerna planeras. Möjliga resonemang för varje princip förutses och hur läraren kan stödja eleven formuleras för varje princip. Denna typ av planering tar troligtvis längre tid och kräver mer jobb i början. Men med uthållighet och träning har vi märkt att det går snabbare med tiden.

Lektionsstruktur

Lektionen bör inledas med att ge eleverna instruktioner kring vad som förväntas av dem i arbetet med uppgiften, det vill säga att de förväntas konstruera egna lösningar och kunna argumentera för sina lösningar. Elever som inte är vana vid denna arbetsform kan gynnas av mer detaljerad information som sedan kan minskas i takt med elevernas vana vid arbetssättet. Lektionerna kan gärna inledas med att eleverna arbetar i par och tar sig an en utmanande uppgift där de inte vet lösningen i förväg. Nästa steg kan vara att låta flera par bilda en mindre grupp, för att kunna diskutera lösningar med varandra. Ett sista steg är att lyfta elevlösningarna i helklass. Fokus läggs med hjälp av uppgifterna på resonemang och problemlösning istället för att enbart träna procedurer.

Lärar-elev-interaktion

Under lektionerna finns läraren med och ger feedback när eleverna signalerar att de behöver hjälp. I dialogen mellan lärare och elever uppmuntras att föra resonemang enligt de fyra principerna. Det finns många fördelar med att planera lektioner på det här sättet. Läraren blir bekant med matematiken och vet precis vad eleverna ska lära sig och vad det innebär för eleverna att lära sig. Denna grundliga planering gör att tydlig feedback finns till som stöd för att läraren ska veta vad som ska sägas beroende på vad eleven behöver hjälp med.

Projektet har genomförts av två lärare i olika klasser och gett goda resultat. Fortsatta studier kan vara att undersöka hur principer fungerar för andra lärare och andra elever. Kan andra lärare förstå, ta till sig och använda principerna i sin undervisning och få samma goda resultat

Referenslista

Bell. P., Hoadley, C.M., & Linn, M.C., (2004). Design-based research in education. In Linn, M.C., Davis, E.A., & Bell, P. (Eds), *Internet environments for science education* (pp. 73-85). Lawrence Erlbaum Associates.

Boaler, J. (2017) *Matematik med dynamiskt mindset: hur du frigör dina elevers potential.* Stockholm: Natur och Kultur

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques*, 1970-1990 (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield Eds.): Springer

Olsson, J. & Granberg, C. (2018). Dynamic Software, Task Solving With or Without Guidelines, and Learning Outcomes. *Technology knowledge and Learning,* https://doi.org/10.1007/s10758-018-9352-5.

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of Feedback. *Review of Educational Research, 77*(1), 81-112. Doi:10.3102/003465430298487

Hiebert, J & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F.K Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.371-404). Charlotte: Information Age.

Jonsson, Bert., Norqvist Mathias., Liljekvist Yvonne., Lithner, Johan. Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *Journal of Mathematical Behavior* 36 (2014) 20-32

Jönsson, Anders. 2013. *Lärande bedömning*. Malmö: Gleerups

Linn, M.C., Bell, P., & Davis, E.A., (2004). Specific design principles: Elaborating the scaffolded knowledge integration framework. In Linn, M.C., Davis, E.A., & Bell, P. (Eds), *Internet environments for science education.* Lawrence Erlbaum Associates.

Lithner, J. 2000. Mathematical reasoning in school tasks. *Educational studies in mathematics*, 41, 165-190.

Lithner, J. 2003. Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics, 52,* 29-55.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276. Doi:10.1007/s10649-007-9104-2

Olsson, J. (2017). *Geogebra, enhancing creative mathematical reasoning* (Doctoral dissertation). Umeå university