MALMÖ UNIVERSITET
Fakulteten Lärande och Samhälle
Samhälle – Kultur - Identitet

Examensarbete i fördjupningsämnet matematik

15 högskolepoäng, avancerad nivå

X eller inte X

En studie om gymnasieelevers problemlösningsstrategier

X or not to X

A Study of Senior High School Students Problem-solving Strategies

Karl Stengård

Kompletterande pedagogisk utbildning 90hp

Examinator: Jan Anders Andersson

Datum för slutseminarium: 2020-01-14

Handledare: Lars Hansson

Sammanfattning

I gymnasieskolans matematikkurser utgör algebra en större del ju högre upp i kurserna man kommer. Men i vilken utsträckning använder gymnasielever algebra när de löser matematiska problem? Detta examensarbete är en studie av hur elever resonerar när de löser matematiska problem och vilka strategier de använder. Studien använder sig av konstruktivistisk teori och ser den algebraiska problemlösningsstrategi som ett schema hos eleven som samexisterar och konkurrerar med andra strategier som en elev kan ha skaffat sig både innanför och utanför skolans värld.

Studien visar att en majoritet av eleverna söker en algebraisk lösning på problemen de ställs inför. Den visar dock också att de elever som använder matematik i något av sina fritidsintressen ofta använder alternativa problemlösningsmetoder som de känner sig mer bekväma med. Det kan finnas en risk att sådana elever hämmas i sin matematiska utveckling om de inte fångas upp av läraren.

Nyckelord:

Algebra, konstruktivism, matematik, problemlösning, räknelära, skolmatematik

Innehållsförteckning

1. Inledning

”Matten var så mycket roligare att hålla på med innan vi började med x!” Är något många matematiklärare har fått fler gånger än t.o.m. de kan räkna. Att börja räkna med bokstäver istället för med siffror är för många elever en tydlig markering för svårare matematik. Det är också en matematik som ofta ifrågasätts. ”Vad kommer vi att ha för nytta av detta?” är en annan vanlig elevkommentar. Det är svårt att finna praktiska tillämpningar för algebran. Ju mer avancerad matematiken i skolan blir, desto mer tycks den skilja sig från den verklighet eleverna upplever i sin egen vardag. På gymnasiet tränas eleverna till att algebran står för en finare matematik, och att en lösning med algebra innebär ett bättre betyg än en med bara siffror. Men om de själva får välja lösningsmetod, utan att bli betygsatta och bedömda, hur gör de då?

Detta examensarbete utgör ett försök att sätta sig in i elevernas egna matematiska tankevärld. Använder elever sig av sina skolkunskaper i matematik när de löser problem, eller hittar de andra, ”hemmagjorda” problemlösningsmetoder? Genom att observera ett antal gymnasielever under en problemlösningssituation hoppas jag kunna identifiera de tankemönster och strategier de använder.

2. Syfte och frågeställningar

Syftet med detta examensarbete är att undersöka gymnasielevers problemlösningsmetoder då de löser problem kopplade till matematikundervisningen. Jag har valt att begränsa undersökningen till problem som är konstruerade för att lösas med en algebraisk metod. Detta därför att algebran är något som upplevs som svårt och problematiskt hos de elever jag träffar i skolan, speciellt dess användning i problemlösning.

De frågor jag söker svar på i min undersökning är:

I vilken utsträckning använder eleverna den påbjudna algebraiska metoden i en situation då de inte blir bedömda för sin lösningsmetod?

För vilken typ av uppgifter använder eleverna en algebraisk metod, och för vilken typ använder de andra metoder?

Skiljer sig eleverna val av metod beroende på om eleven upplever sig vara ”stark” eller ”svag” i matematikämnet?

Skiljer sig eleverna val av metod beroende på om eleven identifierar sig som pojke eller flicka?

3. Teoretiska perspektiv

För att hitta metoder, begrepp och andra analysverktyg för att få svar på min frågeställning, har jag använt tre teoretiska utgångspunkter. Den första är en kunskapsteoretisk utgångspunkt och där har jag valt att använda konstruktivismen och framförallt Jean Piaget. Den andra är en teori utarbetad av Anna Sfard, som försöker förklara hur elever lär sig algebra och vilka svårigheter de stöter på. Den tredje är en kritisk studie av skolans matematik hur ett historiskt perspektiv och som kan användas för att förklara alternativa tankemönster hos elever och som bygger på en avhandling av Sverker Lundin.

3.1 Konstruktivism

Eftersom jag syftar till att göra en undersökning baserad på individuella tankemönster hos enskilda elever sökte jag efter en grundläggande pedagogisk teori att utgå ifrån inför analysen av mitt material. Här fastnade jag för konstruktivismen eftersom den utgår ifrån individens möte med den omgivande miljön och hens tolkningar av denna. Dessutom stämmer konstruktivismen väl överens med hur jag själv tänker kring lärande.

Konstruktivismen är en pedagogisk skola som framförallt utvecklats utifrån Piagets arbete från första halvan av 1900-talet. (Engström, 1998) Engström menar att den moderna konstruktivismen har sin grund i en kunskapsteoretisk position, d.v.s. ett svar på frågan "Vad är kunskap?", som skiljer sig från en mer traditionell syn. Kunskap är, enligt konstruktivismen, inte fakta som objektivt beskriver omvärlden, utan någonting som individen konstruerar själv utifrån sina erfarenheter. Lärande blir då inte enbart ett förmedlande av givna fakta, och pedagogik handlar inte enbart om hur man på bästa sätt förmedlar denna kunskapsmassa. Denna epistemologiska konstruktivism (teorin om vad kunskap är) leder sedan till frågor och slutsatser om hur undervisning skall bedrivas, en "pedagogisk filosofi" med Engströms ord. Någon specifik konstruktivistisk undervisning, eller metod, en entydig konstruktivistisk pedagogik, är det dock svårt att tala om.

En av konstruktivismens förgrundsgestalter, von Glasersfeld, ser i Giambattista Vico, en filosof från Neapel verksam under tidigt 1700-tal, en tidig föregångare till Piaget. (Engström, 1998) Han beskriver de bådas grundläggande kunskapssyn så här:

“För Piaget, i likhet med Vico, är kunskapen aldrig (och kan aldrig vara) en ‘avbildning’ av den verkliga världen. Den är i stället en uppsättning begreppsliga strukturer som visar sig vara anpassade, eller i mitt tycke bättre: *livsdugliga*, inom räckvidden för det lärande subjektets erfarenheter.” (Engström, 1998, s 39) Dessa begreppsliga strukturer kallar Piaget för *scheman*. Ett schema kan t.ex. innefatta att känna igen en situation, att koppla ett visst agerande till denna situation och att förvänta sig ett visst resultat av detta agerande. Genom *assimilation* och *ackommodation* samverkar sedan dessa scheman med subjektets erfarenheter. Allt vi varseblir tolkar vi utifrån dessa scheman, nya upplevelser sorteras i enlighet med existerande mönster och våra erfarenheter blir till minnen lagrade i dessa strukturer. Detta kallar Piaget assimilation. Förr eller senare kommer vi dock att uppleva saker som inte riktigt passar in i de strukturer vi skapat. När våra erfarenheter skiljer sig från det, utifrån schemat, förväntade, uppstår en störning och vi tvingas rekonstruera schemat. Detta kallar Piaget ackommodation. (Glasersfeld, 1998, s 41)

Denna kognitionsteori leder till att man ser kunskap ur ett nytt perspektiv, inte som uppfattningar som är sanna genom att vara en korrekt beskrivning av verkligheten, utan som konstruktioner som kan vara mer eller mindre “livsdugliga” i den mån de ger oss möjligheter att hantera våra erfarenheter och de situationer vi ställs inför.

Den algebraiska metoden för att lösa matematiska problem kan tänkas som ett sådant schema. Ett syfte med den inledande skolundervisningen i algebra är att visa på situationer då aritmetik inte fungerar och måste ersättas med något annat. Eleverna utsätts då för ackommodation och behöver rekonstruera sitt schema för att klara de nya utmaningarna som matematikundervisningen ställer dem inför. Därefter följer en period av assimilation där eleverna löser uppgifter med sitt nya schema för att de hur det fungerar, att det är livsdugligt. För att ett schema skall vara livsdugligt krävs **inte** att det skall kunna användas i ”verkligheten” d.v.s. utanför skolan. Elevens bemästrande av algebran leder till positiv återkoppling från läraren, bättre självförtroende, bättre betyg, stolta föräldrar o.s.v.

3.2 Algebra

Algebran, som har en historia på flera tusen år, var till en början huvudsakligen inriktad på ekvationslösning, en slags retorisk problemlösning. (Persson, 2010, s 33) Under 1600-talet började en utveckling av algebran, i samband med att naturvetenskapen gjorde stora framsteg. Algebran breddades till att även bli ett verktyg för att studera t.ex. samband och generaliseringar inom matematiken, eller t.ex. fysiken. Parallellt har det algebraiska symbolspråket utvecklats. Bokstäverna, det som tydligast skiljer algebran från aritmetiken, har gått från att beteckna ett specifikt men okänt tal, till att även representera generaliserade tal eller variabler i ett samband. Likheten y=kx+m kan t.ex. ses som:

- en ekvation, om jag får reda y, k och m kan jag finna det okända talet x,

- ett samband, om jag får reda på k och m så vet jag förhållandet mellan variablerna x och y,

- en generalisering, alla linjära funktioner kan beskrivas på det här sättet, och formeln kan användas för att behandla sådana samband på en generell nivå.

Den israeliske professorn i matematikundervisning Anna Sfard har en teori om svårigheterna med algebra, som bygger på distinktionen mellan två olika sätt att uppfatta matematiska uttryck och begrepp: strukturellt - som objekt, eller operationellt - som processer. Hon försöker svara på hur vi uppfattar t.ex. tal eller funktioner. Vad tänker vi att de är, när vi jobbar med dem? Naturvetenskaperna sysslar (till stor del) med ting som man kan uppleva med sina sinnen, mäta, väga etc., men matematikens objekt är "osynliga". En siffra på ett papper kan enbart representera ett tal, men detta tal är i sig något som vi bara kan föreställa oss, en idé. Att ha användbara föreställningar, idéer, om matematiska begrepp blir därför nödvändigt för att bemästra matematiken, och det är dessa föreställningar som Sfard undersöker och beskriver.

När vi tänker på t.ex. en funktion, säg y=3x-2, vad tänker vi på då? Vi kan se funktionen som en process: ett tal skall multipliceras med tre och sen skall två subtraheras för att nå resultatet. Detta är den operationella föreställningen, som hänger ihop med algoritmer och handlingar. Alternativt kan man se funktionen som ett objekt, ett förhållande mellan talen x och y, eller som mängden av alla par (x, y) som uppfyller likheten. Detta är den strukturella föreställningen, och bygger på att kunna se funktionen som en helhet, att kunna tala om den mer eller mindre som ett ting.

Även om det kanske verkar motsägelsefullt att t.ex. ett tal kan vara både ett objekt och en process, menar Sfard att de båda synsätten inte utesluter varandra, utan att de är komplementära, precis som att man inom fysiken måste se ljuset både som en partikel och som en vågrörelse för att kunna förklara det fullt ut. Och vi behöver både de operationella och de strukturella föreställningarna för att nå djup matematisk förståelse. Enligt Sfard skall färdighet när det gäller matematiska procedurer, t.ex. aritmetisk säkerhet, inte enbart ses som ett resultat av god begreppsförståelse, utan även som en grund för denna förståelse. Det är inte bara så att jag blir bra på att addera bråktal (operationellt) när jag förstått mig på dem (strukturellt). Jag kanske inte kan förstå dem fullt ut förrän jag blivit bra på att addera dem.

Sfard ser även belägg för att detta mönster upprepar sig i barns utvecklande av talbegreppet. T.ex. finns det ett stadium som barn går igenom när de lär sig räkna, då räkneorden endast kopplas till själva räkneproceduren. "Fem" betecknar då det femte föremålet som räknas, och inte mängden av alla de fem föremål som räknats. På liknande sätt kan man se ungdomar som är kvar i en rent operationell förståelse av bråk, som divisioner, och inte kan uppfatta dem som tal i sig själva.

Denna process, där den lärandes begreppsbildning utvidgas med "nyskapade" objekt, kan enligt Sfard delas in i tre stadier: *internalisering*, *kondensation* och *reifikation.* Det första steget handlar om att bli bekant med, och i viss mån bemästra, de grundläggande operationerna. När det gäller funktioner kan ju t.ex. formeln $y=3x-2$ ses som ett slags recept, en beskrivning av hur en beräkning, operation, skall genomföras. Internaliseringen handlar i detta fall om att bli duktig på sådana operationer, att använda formler som denna.

När proceduren har internaliserats vidtar kondensationen, då den lärande börjar kunna betrakta operationen som en helhet. Jag behöver t.ex. inte genomföra några beräkningar för att kunna jämföra funktionerna $f(x)=3x-2$ och $g(x)=3x+2$. Den nya "entiteten" (funktionen) är fortfarande starkt knuten till operationen (beräkningen av funktionsvärdet), men den får på sätt och vis ett eget liv, där olika manipulationer, generaliseringar och växling mellan representationsformer underlättas. Jag kan (för att fortsätta på exemplet ovan) se att $g(x)=f(x)+4$, att båda funktionerna kan representeras av räta linjer, med samma lutning men med den ena fyra steg ovanför den andra, och se båda som exempel på funktioner på formen $y=kx+m$.

Till slut kommer det sätt på vilket vi upplever funktionsbegreppet att förändras, som ett objekt i sig, inte bara som en operation på sedan tidigare "existerande" objekt. Det är denna som benämns *reifikation*, när man plötsligt kan "se något välbekant i ett helt nytt ljus" (Sfard, 1991, s. 19). När jag kan se en funktion som ett fullvärdigt objekt, kan jag t.ex. se en funktion som lösning på en ekvation, som en obekant i exempelvis en differentialekvation.

Varför är då denna reifikation så svår? Åtminstone en del av svaret ligger i det Sfard kallar en ond cirkel (vicious circle). Reifikation på en nivå, utifrån en viss typ av processer, förutsätter i viss mån en samtida internalisering på en högre nivå, av mer avancerade processer utförda på de objekt som just “skapas” genom reifikationen. Reifikationen av t.ex. negativa tal, operationellt sprungna ur subtraktioner, sammanfaller med internaliseringen av operationer på negativa tal, t.ex. multiplikationer. Så för att kunna se negativa tal som objekt i sig, behöver jag i viss mån bli bra på att bl.a. multiplicera dem, men för att bli riktigt bra på att multiplicera dem, behöver jag i viss mån kunna se dem som objekt i sig, som fungerar i stort sett likadant som positiva heltal och rationella tal. “Reifikationen på lägre nivå och internaliseringen på högre nivå är förutsättningar för varandra” (Sfard, 1991, s 31).

3.3 Skolmatematik och räknelära

Att lära sig ett nytt matematiskt språk som algebra är alltså en svår och tidsödande procedur. Speciellt gäller detta för elever som inte nått reifikation på lägre nivåer som att använda formler eller enklare aritmetiska operationer. I *Skolans matematik, En kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling* (2008) pekar Sverker Lundin på algebrans begränsade användbarhet i vardagliga situationer. Han visar också att det historiskt funnits en problemlösningsmetodik som existerat vid sidan om skolmatematiken, den så kallade räkneläran. (Lundin, 2008, s109-) Räkneläran bestod av en rad ”recept” för att lösa praktiska matematiska problem som kunde uppkomma inom t.ex. handel och jordbruk. Den var riktad till vuxna som behövde strategier för att räkna ut saker relaterade till sitt yrkesliv. Den var helt aritmetisk till sin natur. ”Räknelärorna beskriver tämligen exakt vad som skall göras, utan inblandning av begrepp eller teorier. Man kan se det som en sekventiell eller algoritmisk förståelse av räknande. Räknelärorna innehåller en rik uppsättning olika program eller recept för att hantera olika situationer.” (Lundin, 2008, s118)

Under 1900-talet försvann räknelärorna som litterär genre. Matematik blev något som man lärde sig i skolan. Här skiljer sig ofta matematiken från andra skolämnen. I t.ex. historia har eleverna ofta kunskaper de lärt sig på egen hand, via populärkultur, resor eller dokumentärfilmer. Som lärare blir det viktigt att använda, uppmuntras och ibland förhålla sig kritisk till dessa kunskaper. Inom matematiken däremot finns det bara en väg: skolans.

4. Metod

För att svara på frågorna i min frågeställning har jag använt mig av deltagande observationer där jag givit mina försökspersoner i uppgift att lösa ett antal matematiska problem. Tanken med observationer var att försökspersonerna skall lösa problemen och motivera sitt val av lösning muntligt och/eller skriftligt. De uppmanades att tala om hur de tänkte under observationerna för att jag skulle få så god uppfattning så möjligt av deras tankevärld.

4.1 Teoretisk bakgrund

Eftersom min undersökning utgår från en konstruktivistisk utgångspunkt var min ursprungliga tanke att använda mig av Piagets kliniska intervju som metod. I *The childs conception of the World* drar Piaget upp riktlinjerna för hur en sådan intervju skall utföras. Syftet är att skilja ut de tankar som barnet endast imiterat från en vuxen och de som härrör från barnets egenutvecklade tankevärld. Piaget menar dock att barn redan vid 11-12 års ålder börjar förstå världen som en vuxen (Piaget, 1929, s32) och att den kliniska intervjun därför riktar sig till yngre barn. Trots detta har jag sett likheter med det Piaget vill göra med sin kliniska intervju och det jag själva vill göra med mitt projekt. Problemlösningsmetoden som lärs ut i gymnasiematematiken (identifiering av variabler → matematisk modellering → tolkning av lösning) kan till en början ses som en imiterad idé som eleven lärt sig på lektionerna genom att använda läraren som modell. Dock finns också andra metoder som eleven själv kommit fram till från problemlösning i vardagslivet och skoltiden. Att hitta och identifiera dessa metoder påminner om Piagets problem att hitta barnets egen världsuppfattning.

Sammantaget kan man säga att min metod är inspirerad av Piagets kliniska intervju men med viktiga skillnader. Eftersom själva grunden till observationen utgörs av matematiska problem där det finns ett svar som är rätt men flera olika sätt att komma fram till detta, blir min metod baserad på att hjälpa eleven komma fram till svaret. Ett bättre namn på metoden är därför en deltagande observation. Om jag märker att elevens tankebana är ett fruktbart sätt att lösa uppgiften så kan jag uppmuntra elever att fortsätta på samma sätt, annars kan jag ge ledtrådar till ett alternativt sätt att lösa uppgiften.

Innan genomförandet av observationerna funderade jag på vad som var viktigt att tänka på i situationen. Jag kom fram till ett antal punkter som jag skulle ha med mig vid observationerna:

- Det är Försökspersonens(FP) tankar som är det viktiga – låt FP själv formulera sig och ingrip inte förrän FP kör fast. Här gäller det att inte omedvetet introducera felkällor som försvårar analysen (Backman, s 61).
- Få FP att slappna av och förstå att det inte är någon bedömningssituation utan en möjlighet att öva sig i problemlösning.
- Använd de två första uppgifterna för att få en uppfattning om elevens problemlösningsförmåga. Välj sedan att gå vidare med lättare eller svårare uppgifter.

För att strukturera återstående del av detta metodavsnitt har jag använt mig av *Rapporter och Uppsatser* av Jarl Backman. Syftet med strukturen är att läsaren skall kunna utvärdera min metod samt att undersökningen skall kunna gå att återskapa (Backman, 2011, s 43).

4.2 Försökspersoner

Totalt genomfördes åtta observationer med elever på skolan där jag arbetar. Observationerna genomfördes under vårterminen och höstterminen 2019. Då min undersökning inte gör anspråk på att vara kvantitativ, användes ingen statistisk urvalsmetod för att få försökspersoner (Backman, 2011, s 61). Metoden för att välja ut elever var att, efter samråd med aktuell lärare, gå med in på en lektion och förklara att jag sökte frivilliga till en undersökning. Ofta fanns det ett stort gensvar bland eleverna och därför tillämpades lottning för att välja ut försökspersonen. Ett viktigt kriterium i urvalet var att jag inte själv undervisar eller har undervisat någon försöksperson i matematik. Detta eftersom försökspersonerna skall kunna utrycka sig utan tanke på vad läraren vill höra. Dock kände jag några av försökspersonerna tidigare då jag undervisat dem i historia eller programmering. Det kan också vara relevant att försökspersonerna inte anmälde sig för att vara mig till lags. Snarare såg de undersökningarna som ett välbehövligt träningspass i matematik, ett ämne som många upplever som svårt.

Samtliga försökspersoner går i årskurs två på gymnasiet. Några går på teknikprogrammet och läser kursen Matematik 3c och några går på estetiskt program och läser kursen Matematik 2b.

De senare läser matematik som tillval (ungefär hälften av eleverna gör detta). Nedan följer en lista på försökspersonerna som deltog i studien.

FP	**Program**	**Kön**
1	ES	F
2	ES	F
3	TE	P
4	ES	F
5	TE	P
6	ES	P
7	TE	P
8	ES	P

4.3 Material

Materialet utgjordes av ett frågehäfte med fem stycken matematiska problem. Dessa problem förklaras ingående i avsnittet om resultat. Problemen är tänkta att lösas algebraiskt med metoder som lärs ut i grundskolan samt kurserna i Matematik 1 och 2 på gymnasiet. Försökspersonerna hade också tillgång till miniräknare.

4.4 Procedur

Observationerna gjordes i en lugn miljö i grupprum på skolan. Försökspersonerna uppmanades att kommunicera muntligt och/eller skriftligt för att förklara hur de tänkte. De tilldelades problemen ett i taget, ibland i olika ordning beroende på försökspersonens nivå samt hur mycket tid som fanns kvar. Totalt avsattes ca 40 minuter till varje observation. Resultaten samlades in i form av inspelningar samt försökspersonernas anteckningar.

4.5 Forskningsetiska ställningstaganden

Min undersökning riskerar inte att skada försökspersonerna och några känsliga personuppgifter samlas inte in, så det finns igen lagtext som reglerar hur den får genomföras. Dock anses det inte vara god forskningssed att samla information på detta sett utan att försökspersonerna givit sitt samtycke (Vetenskapsrådet, 2011, s 15). Innan observationen startade fick försökspersonerna därför skriva under en samtyckesblankett (se bilaga 1). Jag valde också att inte använda mig av videoinspelning. Ljudupptagning samt anteckningar från försökspersonerna skulle ge samma information och verka mindre integritetskränkande (Vetenskapsrådet, 2011, s 27). Ett problem som tidigt gick upp för mig var att eftersom försökspersonernas svar och resonemang skulle finnas med i min rapport, så skulle det vara teoretiskt möjligt för försökspersonernas klasskamrater att identifiera dem. Då de informerades om detta valde en försöksperson att inte delta i observationen, och en annan lottades fram istället. De andra åtta valde att delta.

5. Tidigare forskning

I detta avsnitt har jag valt att ta upp två studier som behandlar matematiska problemlösningsstrategier hos ungdomar. Den första är en rent kvantitativ studie som gjordes i Spanien 2012, *Algebraic problem solving and learning strategies in compulsory secondary education*, av Javier Gasco & José Domingo Villarroel. Den andra är ett examensarbete från Karlstads Universitets lärarutbildning, *Elevers problemlösningsstrategier – En studie av gymnasielevers val av strategier vid problemlösning* som är skrivet av Clara Paulsson 2008. Denna studie har både kvalitativa och kvantitativa delar.

I Gasco & Villarroel (2012) används en enkätundersökning med tre uppgifter i stigande svårighetsgrad och ett antal frågor om studieteknik till 205 spanska elever i åldrarna 14-16 år, d.v.s. något yngre än de i min studie. Problemlösningsstrategierna delas upp i aritmetisk och algebraisk metod. Resultatet av studien visar att elever undviker att använda algebraiska lösningar på enklare problem där det finns en aritmetisk lösning som är lätt att se. Eleverna skiftar till algebraiska lösningsmetoder när problemen blir så svåra att de måste. (Gasco & Villarroel, 2012, s 614) Författarna föreslår därför att lärare inte skall göra problemen för enkla när de introducerar algebra i skolan. Eleverna tenderar att se algebran som ett onödigt steg om de kan lösa uppgiften utan den. En annan slutsats från studien är att de elever som mer ambitiösa i sin studieteknik oftare väljer algebraiska strategier.

Studien av Paulsson (2008) använder sig av elever i två klasser på naturvetenskaps-programmet, en etta och en tvåa. De får två öppna uppgifter att lösa, där det finns flera möjliga strategier. Efter att eleverna fått räkna tyst i helklass blir några slumpvis utvalda för att förklara hur de tänkt. Även om uppgifterna är tänka att ha flera möjliga lösningsmetoder kan de delas upp i en ”enkel” aritmetisk eller grafisk lösning samt en ”svår” algebraisk. (Paulsson, 2008, s 17-25) Ett tydligt resultat av studien är att de elever som går i tvåan väljer den algebraiska lösningen i större utsträckning än de som går i ettan. (Paulsson, 2008, s 27)

Gemensamt för de båda studierna är att det verkar som att elever tycker att algebraiska lösningar är svårare och att det är elever med större vana eller högre ambition som väljer dem. Mitt examensarbete syftar till att se om detta är fallet även för eleverna i min studie. Jag har dock valt att ha färre elever men fler uppgifter och mer tid att också svara på *varför* eleverna väljer som de gör.

6. Resultat och analys

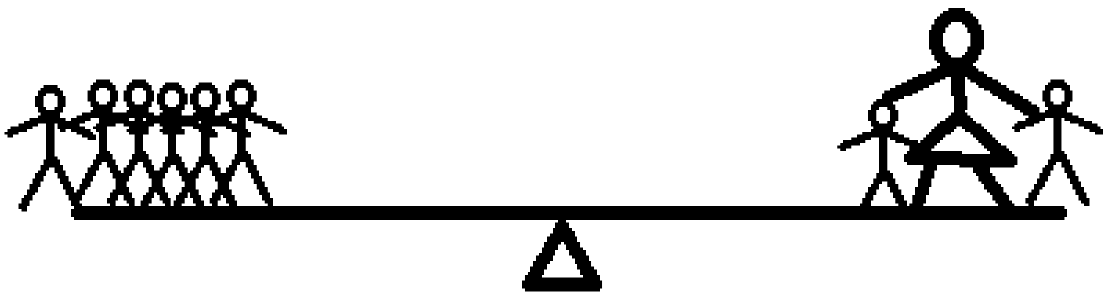
I detta kapitel kommer jag att redogöra för resultatet av studien. Resultatredovisningen kommer att delas upp ett avsnitt per uppgift. Först kommer en kort redogörelse för uppgiftens karaktär samt varför jag valt ut den. Sedan presenterar jag försökspersonernas sätt att lösa uppgiften, både i tabellform och i en analys. Jag kommer också att ta med flera utdrag ur mina observationer för att ge läsaren en möjlighet att sätta sig in i försökspersonernas resonemang (Backman 2011, s67). Sedan följer ett avsnitt där jag försöker få en helhetsbild av varje enskild försökspersons sätt att tänka kring dessa typer av problem.

6.1 Försökspersonernas lösningar på uppgifterna

Detta avsnitt presenterar uppgifterna, samt behandlar försökspersonernas lösningar på dem, uppgift för uppgift.

6.1.1 Uppgift 1

Dagisfröken Anette väger 56 kg. När hon står på en gungbräda med sina åtta dagisbarn väger det jämnt om hon har två barn hos sig och sex barn på den motsatta sidan. Om vi antar att alla barn väger lika mycket, hur mycket väger ett dagisbarn?



Detta är en klassisk uppgiftstyp för att introducera ekvationen som problemlösningsverktyg. Den går att lösa i två steg med enkla uträkningar, men eleverna måste själva bestämma vad ”x” skall representera.

Lösningsmetoderna för denna uppgift kan delas upp i två kategorier; ekvation och resonemang. Ekvation definieras här som att FP sätter barnets vikt till en variabel och försöker lösa ut denna.

Försöksperson	Lösningsmetod	Svar	Tid
1	Ekvation	Rätt	130 s
2	Ekvation	Rätt, utan enhet	70 s
3	Ekvation	Rätt	68 s
4	Resonemang	Rätt	220 s
5	Resonemang	Rätt, lite hjälp	295 s
6	Ekvation	Rätt	220 s
7	Ekvation	Rätt	110 s
8	Ekvation	Slarvfel	230 s

Med resonemang menas att FP resonerar sig fram till en lösning utan hjälp av ekvation. Trots att formuleringen av uppgiften med sitt jämviktstänkande inbjuder till lösning med ekvation, väljer två av eleverna att resonera sig fram till svaret. Här följer ett exempel på resonemang, från observationen med FP5:

Alltså de här 6 dagisbarnen måste ju väga mer än 56 kg iallafall...

Jo, så måste det ju vara.

Två på andra sidan... man vet då att de väger mer än 60 tillsammans.

Ja, det kan nog stämma.. men du behöver ju ett exakt svar.

Ok.. men.. hmm...

Du kan ju tänka om det finns något sätt att formulera det så att du kan ta reda på det.

Ok.. då behöver jag tänka lite.. [lång tystnad] Ja, ok ok. Eftersom man har två barn här så måste fyra barn väga lika mycket som hon väger, eftersom 6 minus 2 är 4... Skall jag skriva något?

Ja, det kan vara bra, så ser jag hur du tänkt.

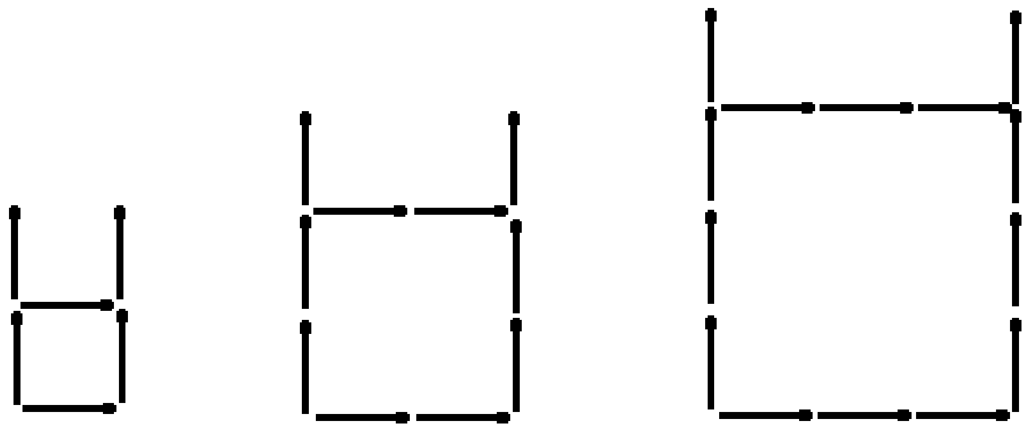
Ok, jag skriver med ord.. [skriver: "Eftersom att det är 6 barn på ena sidan och 2 på andra måste Anette väga lika mycket som 4 barn"]. Och så 56 genom 4.. [använder räknaren] det blir 14 kg.

De FP som löst uppgiften med ekvation har i allmänhet löst den rätt och oftast ganska snabbt. Några kontrollerar sina svar i efterhand. Den enda felräkningen kom då FP8 räknade 6X-2X=8X i sin ekvation.

Rolf lägger ut tändstickor i figurer efter ett mönster.

a) Hur många tändstickor behöver han till figur 8?

b) Rolfs ask rymmer 123 tändstickor. Vilken är den största figur han kan lägga med dessa?



Figur 1 Figur 2 Figur 3

6.1.2 Uppgift 2

Även detta är en klassisk typ av uppgift, som ofta dyker upp på nationella prov i 9:an eller i kursen Ma1 på gymnasiet. Tanken är att eleverna skall resonera sig fram en modell där antal stickor är 4n + 2, där n är numret på figuren.

Denna uppgift går att lösa på flera olika sätt, hos försökspersonerna går det att urskilja tre olika lösningsmetoder.

Försöksperson	Lösningsmetod		Svar		Tid
	Uppgift a)	Uppgift b)	Uppgift a)	Uppgift b)	
1	Modell, insättning	Modell, ekvation	Rätt	Rätt	250 s
2	Stegning	Modell, ekvation	Rätt	Rätt	376 s
3	Stegning, huvudräkning	Stegning, huvudräkning	Rätt	Rätt	275 s
4	Figur	Stegning, huvudräkning (Modell, ekvation med hjälp)	Rätt	Fel (rätt med hjälp)	710 s
5	Modell, insättning	Modell, huvudräkning	Rätt	Rätt	265 s
6	Stegning	Modell, ekvation	Rätt	Fel(rätt med hjälp)	795 s
7	Stegning, huvudräkning	Stegning	Rätt	Rätt	275 s
8	Stegning	Modell, ekvation	Rätt	Rätt	450 s

Den vanligaste lösningsmetoden på uppgift a) var att stega sig fram till svaret, antingen genom att skriva ner alla steg eller genom att räkna dem i huvudet. Ett par försökspersoner uttryckte att de visste att metoden anses sämre av lärare, men då det i detta fall räckte med att nå en lösning tyckte de att stegningen kändes säkrare. Även på uppgift b) valde ett par elever att använda metoden även om de upplevde den uppgiften som svårare. Detta exempel är från observationen med FP3:

Hmm.... den där ser klurig ut.. [tystnad]. 6.. 10.. 14.. [räknar i figuren]. Om man nu skall hitta ett samband här... [tystnad]. Det ökar med 4 varje gång, såklart. 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34 [räknar på fingrarna]. 34 tändstickor måste det bli.

Ja det stämmer bra!

Och så B... 123 stycken. Det kan man ju göra på samma sätt, fast det kanske skall göras snyggare. [tystnad]. Om man fortsätter till 100, så är figur 25 gjord av 102 tändstickor. [tystnad] Sedan 5 steg till, figur 30 är gjord av 122. Det är den största, så figur 30 blir det alltså.

Det är helt rätt. Du väljer att lösa den med huvudräkning, finns det något annat sätt?

Ja, om det hade varit ett prov hade jag nog inte fått full poäng här, haha... Det finns nog någon formel som... Men nu tänkte jag bara löser den på det sätt jag tycker är enklast.

Att lösa uppgiften med en modell menas att antingen skriva upp sambandet algebraiskt, X = 4N + 2, eller att etablera en förståelse för sambandet mellan X och N. FP1, FP2 och FP5 använde en algebraisk modell, dock föredrog FP5 att använda huvudräkning framför klassisk ekvationslösning på b)-uppgiften. FP4 och FP6 gjorde misslyckade försök på b)-uppgiften men fick hjälp att använda en algebraisk modell.

FP4 var ensam om att lösa a)-uppgiften med hjälp av en figur. Lösningsmetoden fungerar dock inte så bra på b)-uppgiften så där behövde FP4 tänka om, vilket bidrog till misslyckandet.

6.1.3 Uppgift 3

> Jag tänker på två tal. Det ena talet är 11 större än det andra. Om man multiplicerar det mindre talet med 2, och multiplicerar det större talet med 3, och adderar resultaten, blir summan 13. Vilka var de två talen jag tänkte på?

”Jag tänker på tal”-uppgifter är ett annat vanligt sätt att få elever att träna algebraisk problemlösning. Denna variant har som extra svårighet att det är två tal som tänks på, samt att det ena talet kommer att bli negativt. Språket i uppgiften kan också uppfattas som svårt. Tanken är att eleverna skall sätta upp ekvationen 2X + 3(X + 11) = 13 och lösa den.

Denna uppgift gjordes enbart av fyra försökspersoner. Anledningen till detta var att observationerna pågick under en begränsad tid och att de elever som behövt längre tid med de tidigare uppgifterna inte skulle hinna med de svårare uppgifterna. Uppgift 3 användes för att dessa elever skulle få en lite klurigare uppgift av en typ som jag ändå bedömde att de hade en chans att klara.

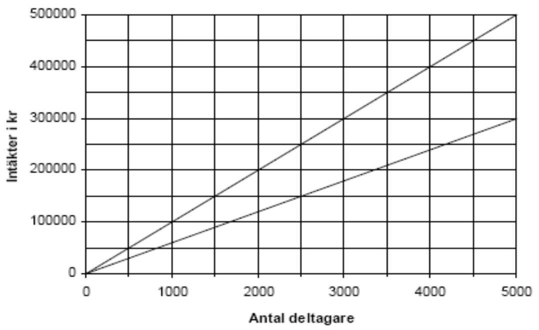
Försöksperson	Lösningsmetod	Svar	Tid
4	Prövning (ekvation med hjälp)	Fel (rätt med hjälp)	1082 s
5	Ekvation, prövning (ekvationslösning med hjälp)	Rätt, lite hjälp	950 s
6	Ekvation, två variabler	Fel	910 s
8	Ekvation, två variabler, substitution	Rätt	540 s

Uppgiften var utvald för att vara svår att lösa med andra metoder än de rent algebraiska. Försökspersonerna förstod detta och samtliga gjorde ansatser för att sätta det minsta av talen till X. När de gjort detta dyker det upp två problem. För det första finns svårigheten att sätta det andra talet till X+11 och inte bara till Y. För det andra är det inte trivialt att ställa upp och lösa ekvationen med korrekt användning av parenteser och räkneordning.

FP5 ställer upp en korrekt ekvation med en variabel men försöker till en början gissa sig fram till det korrekta värdet på X. Endast efter uppmaning och hjälp att komma igång försöker hen lösa ekvationen systematiskt och lyckas då också med detta. FP4 behöver också hjälp att ställa upp ekvationen korrekt. FP6 och FP8 ställer upp ekvationer i två variabler vilket kan leda till att man fastnar om man inte kommer på att Y = X + 11. FP8 lyckas med detta, men inte FP6. Då dessa elever går i tvåan och läser kursen Ma2b där problem med två variabler ingår bidrar säkert till att de väljer denna lösningsmetod.

6.1.4 Uppgift 4

I tävlingen ”Prejoggen” betalar alla deltagare en startavgift. Startavgiften är större om man är senior än om man är junior. Diagrammet visar hur intäkterna från vardera av de två grupperna beror på antalet deltagare.



a) Vilken startavgift får en senior betala och vilken startavgift får en junior betala?

b) Arrangören kan maximalt ta emot 5000 tävlande. Skriv en formel som beskriver hur mycket pengar man får in om maximalt antal anmäler sig och x stycken av dessa är juniorer.

Denna uppgift är indelad i en relativt enkel a)-uppgift vars syfte är att ”dra in” försökspersonen i uppgiften och ge självförtroende. Det är lösningarna på b)-uppgiften som är det egentligt intressanta att studera. Här leds eleverna till att göra en algebraisk lösning genom att skriva ett uttryck där X är antalet anmälda juniorer. Trots detta är lösningarna inbördes olika och kan delas in i tre kategorier.

Den första metoden innebär att resonera sig fram till uttrycket 500000 – 40X, t.ex. genom att tänka ut att 500000 kr är intäkten då alla anmälda är seniorer, men att klubben förlorar 40 kr för varje junior som tar en seniors plats.

Den andra metoden liknar det första med den skillnad att försökspersonerna ställer upp ett fullständigt uttryck för intäkterna som de sedan förenklar enligt reglerna för algebraiska uttryck: 100(5000 – X) + 60X = 500000 – 100X + 60X = 500000 – 40X. Nyckeln är att förstå att antal seniorer går att skriva som 5000 – X, samt att behärska reglerna för parentesmultiplikation. Följande dialog är från observationen med FP7, som använder denna metod och klarar uppgiften efter vissa besvär:

*[läser igenom uppgiften] Då skall vi se. Så mycket man får in om maximal antal anmäler sig, alltså 5000. Och maximalt får man ju in om ingen junior anmäler sig. [tystnad] Så då kan ta 60*X, så mycket får man in på juniorerna. Och så de vuxna.. 5000*60X.. eller... [tystnad] Och de vuxna är 100X.. nej..[tystnad] 5000 är maximalt antal deltagare.[skriver 5000 - X*100]*

Ja och varje junior betalar 60 kronor.

Ah, ja det måste ju vara 100 per vuxen.. så 5000 – X blir ju antalet vuxna. Gånger 100 så har vi en formel för det[skriver in parentes runt 5000 - X]. Men hur får vi då in juniorerna i det.. hmm [tystnad]. Jag tror inte jag klarar det... men jag borde klara det.

Du är riktigt nära.

Vi kan ju inte kalla de vuxna för Y.. för de är ju också X. Och inte Y juniorer heller... Men om jag lägger ihop och lägger till 60 X för juniorer. Det borde ju bli rätt.

Du kan ju testa och se.

Ok, om vi då räknar ihop det så får vi 500000 minus 100X plus 60X [skriver]. Så det blir 500000 minus 40X.. Ja det är mitt svar.

Det är helt rätt.

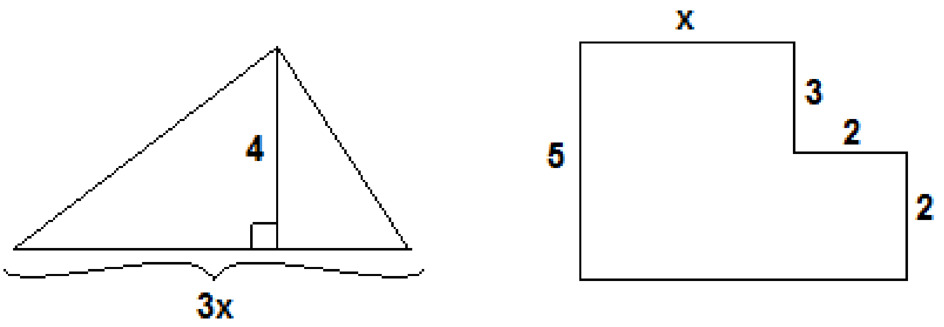
Jag tänkte lite väl omständligt där.. men det löste sig bra till slut.

Den tredje metoden är att använda ett uttryck med två variabler: 100Y + 60X. Därefter utför man substitutionen Y = 5000 – X och förenklar. Denna metod hör till kursen Ma2b som ES-eleverna läser i tvåan. Samtliga FP som försökte med lösningar i två variabler misslyckades dock med uppgiften.

Försöks-person	Lösningsmetod		Svar		Tid
	Uppgift a)	Uppgift b)	Uppgift a)	Uppgift b)	
1	Avläsning, division	Framresonerat uttryck, en variabel	Rätt	Fel	705 s
2	Avläsning, division	Uttryck, en variabel, förenkling	Rätt	Slarvfel	520 s
3	Avläsning, division	Uttryck, två variabler	Rätt	Fel	562 s
4	Avläsning, division	Uttryck, två variabler, ekvationssystem	Rätt	Fel	745 s
5	Avläsning, division	Framresonerat uttryck, en variabel	Rätt	Rätt	265 s
6	Avläsning, division	Uttryck, två variabler	Rätt	Fel	1113 s
7	Avläsning, division	Uttryck, en variabel, förenkling	Rätt	Rätt	495 s
8	Avläsning, division	Uttryck, två variabler	Rätt	Fel	795 s

6.1.5 Uppgift 5

Figurerna nedan har lika stora areor. Hur lång är sträckan x?



Alla mått är i centimeter.

Uppgiften kan beskrivas som en klassisk problemlösningsuppgift som skall träna elevernas förmåga att använda algebra och ekvationslösning. Till sin struktur är uppgiften inte olik uppgift 1, med den skillnaden att X i detta fall är givet i uppgiften samt att den ekvation som uppkommer är svårare både att formulera och att lösa. Dessa faktorer bidrar båda till att

”tvinga” försökspersonerna att använda algebra snarare än ett intuitivt resonemang. Sex av åtta försökspersoner hann med att lösa uppgift 5.

Försökspersonernas lösningsmetoder till denna uppgift var mycket likartade. De börjar med att teckna algebraiska uttryck för arean av de två figurerna, och fyra av försökspersonerna kommer på att man skall sätta likhetstecken mellan areorna och lösa ekvationen för att få fram värdet på X. Svårigheterna som sedan uppkommer är rent procedurmässiga och uppkommer när uttrycken skall förenklas och ekvationen lösas. En lösningsmetod skiljer sig från de andras, då FP5 utför förenklingarna skriftligt och sedan ser svaret utan att ställa upp ekvationen.

Försöksperson	Lösningsmetod	Svar	Tid
1	Två uttryck för area (ekvation med hjälp)	Fel (Rätt med hjälp)	845 s
2	Två uttryck för area, ekvation	Förenklingsfel(Rätt med hjälp)	495 s
3	Två uttryck för area (ekvation med hjälp)	Fel (Rätt med hjälp)	562 s
5	Två uttryck för area, huvudräkning	Rätt	580 s
7	Två uttryck för area, ekvation	Rätt	130 s
8	Två uttryck för area, ekvation	Fel	590 s

Följande utdrag från observationen med FP1 visar svårigheterna som många elever på gymnasiet har med denna typ av uppgift. Dels den felaktiga förenklingen $3X * 4 / 2 = 1.5X * 2$, men framförallt oförmågan att använda ekvationer som en naturlig del av problemlösningen. FP1 klarade av uppgiften till slut efter att ha fått hjälp att komma igång på rätt sätt.

Så hela trekanten är ju lika stor som den andra.. Men innan man kan börja räkna så måste man ju veta hur stor sidan X är...

Nja, det behöver du väl inte? Det kanske du kan räkna ut samtidigt?

Så jag kan ju börja med att räkna ut triangeln. Så det blir 3X gånger 4 delat på 2.

Ja det är rätt formel för triangelarea.

*Ja ok. [tystnad].. så det blir 1,5X * 2.. och då kan man göra likadant med den andra. Att man räknar ut det med X och så... Så jag kallar de här delarna för A, B och C.. [skriver ner]. Jag gör säkert fel nu men... Och så plussar jag ihop... [skriver 5X + 4]. Men det stämmer ju inte.. De skall ju bli lika stora.*

Men du har ju 2 stycken formler för det hela.. men hur skall du gå vidare härifrån?

[tystnad] Man kanske kan lägga ihop dem?

Nja, det kommer nog inte att ge något...

6.2 Försökspersonernas problemlösningsstrategier

I detta avsnitt kommer jag att gå djupare in på varje enskild försökspersons sätt att lösa de olika uppgifterna. Jag kommer att försöka hitta ett generellt tankemönster för hur försökspersonen löser uppgifterna med fokus på användningen av algebra.

6.2.1 Försöksperson 1

FP1 är flicka och går estetiskt program. Hon tycker matematik är ”ganska roligt” men inget favoritämne. FP1 strävar efter betyget C eller bättre i alla kurser och ägnar mycket tid och att plugga hemma. Hon har aldrig sysslat med matematik utanför skolan. Följande tabell sammanfattar FP1s lösningar på uppgifterna:

Uppgift	**Lösningsmetod**	**Svar**	**Tid**
1	Ekvation	Rätt	130 s
2a	Modell, insättning	Rätt	
2b	Modell, ekvation	Rätt	250 s
4	Framresonerat uttryck, en variabel	Fel	705 s
5	Två uttryck för area (ekvation med hjälp)	Fel (Rätt med hjälp)	845 s

FP1 är väldigt bekväm med att använda algebra som verktyg vid problemlösning. ”*Alltid när det kommer sådana här figurer så försöker jag komma på en formel som passar”* säger hon när hon får se uppgift 2. Hon använder en algebraisk lösning på samtliga uppgifter och försöker aldrig med någon annan metod än den som lärs ut av läraren och läroboken. Hon är också relativt säker på algebraiska förenklingar och ekvationslösning. Hon har med Sfards terminologi uppnått en god operationell förståelse. På uppgifterna 1 och 2 leder detta till tydliga och effektiva lösningar som kommuniceras på ett föredömligt sätt och på kort tid.

Varför misslyckas då FP1 på uppgifterna 4 och 5? Hon är nära en lösning på båda uppgifterna, men fastnar på viktiga steg.

På uppgift 4 är lösningen ett uttryck, 500000 – 40x. Istället för att räkna fram uttrycket med en förenkling försöker FP1 resonera sig fram och får då det felaktiga 500000 – 60x.

På uppgift 5 lyckas FP1 få fram förenklade uttryck för båda areorna, 6x respektive 5x + 4, efter viss hjälp. Hon känner då att hon misslyckats eftersom de båda uttrycken inte är lika, som om uppgiften bestod i att bevisa att areorna alltid är lika oavsett värde på x. När hon inser att hon skall ställa upp en ekvation kan hon lätt lösa den.

Man kan tydligt se hur FP1 får problem när hon förväxlar olika sätt att använda algebraiska uttryck. Den strukturella förståelsen uppvisar brister. Denna mångtydighet hos algebran är enligt Sfard en huvudanledning till varför många upplever algebra som svårt.

6.2.2 Försöksperson 2

FP2 är flicka och går estetiskt program. Hon har aldrig upplevt sig vara bra på matematik, men övertalades av föräldrar att välja Ma2b. Hon upplever kursen som svår och går ofta på resurstid för att hänga med. Hon sysslar aldrig med matematik utanför skolan. Följande tabell sammanfattar FP2s lösningar på uppgifterna:

<table>
<tr><th>Uppgift</th><th>Lösningsmetod</th><th>Svar</th><th>Tid</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Ekvation</td><td>Rätt, utan enhet</td><td>70 s</td></tr>
<tr><td>2a</td><td>Stegning</td><td>Rätt</td><td rowspan="2">376 s</td></tr>
<tr><td>2b</td><td>Modell, ekvation</td><td>Rätt</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Uttryck, en variabel, förenkling</td><td>Slarvfel</td><td>520 s</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Två uttryck för area (ekvation med hjälp)</td><td>Förenklingsfel (Rätt med hjälp)</td><td>495 s</td></tr>
</table>

FP2 använder en problemlösningsstrategi som liknar FP1s. Hon använder en algebraisk lösningsmetod på alla uppgifter utom 2a. FP2 arbetar tyst, utan att resonera verbalt. Hon har heller inte samma säkerhet i att räkna algebraiskt som FP2, vilket leder till rena räknefel på uppgift 4 och 5.

Förutom räknefelen väljer FP2 korrekta strategier på samtliga uppgifter. Hon har inga problem att växla mellan att svara med algebraiska uttryck eller att lösa ekvationer. Det verkar som om FP2 arbetar upp sin operationella och strukturella förståelse parallellt. FP2s dåliga självförtroende i matematik verkar till stor del vara ogrundat.

6.2.3 Försöksperson 3

FP3 är pojke och går tekniskt program. Han upplever att han haft ganska lätt för matte och inte behövt plugga speciellt mycket, utom ibland till prov. Han använder ibland matte utanför skolan, för att räkna ut olika saker i spel, eller i programmering som är ett stort intresse. Följande tabell sammanfattar FP3s lösningar på uppgifterna:

<table>
<tr><th>Uppgift</th><th>Lösningsmetod</th><th>Svar</th><th>Tid</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Ekvation</td><td>Rätt</td><td>68 s</td></tr>
<tr><td>2a</td><td>Stegning, huvudräkning</td><td>Rätt</td><td rowspan="2">275 s</td></tr>
<tr><td>2b</td><td>Stegning, huvudräkning</td><td>Rätt</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Uttryck, två variabler</td><td>Fel</td><td>562 s</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Två uttryck för area (ekvation med hjälp)</td><td>Fel (Rätt med hjälp)</td><td>562 s</td></tr>
</table>

FP3 är väldigt säker på huvudräkning och undviker att skriva ner så mycket av sina lösningar. Det är också uppenbart att FP3 är väldigt osäker på att använda algebra för problemlösning och undviker att använda det när det inte är absolut nödvändigt. Exempel på denna osäkerhet kan vi se på uppgift 5: ”*Ok, så i denna figuren [tittar på högra figuren] Så är denna arean 2 gånger 2. Och denna sidan är 5.. men vad hjälper det? [tystnad] Jag kan fortfarande inte räkna ut arean eftersom jag inte vet X.”* Under sitt försök att klara uppgiften har FP3 svårt att se meningen med att använda X i uträkningar om han inte omedelbart kan se vilket värde X har.

Det är tydligt att FP3 har en egen räkneförmåga som delvis är utvecklad vid sidan av skolmatematiken. Med konstruktivistiskt språkbruk kan man se denna räkneförmåga som ett schema som visat sig livsdugligt både i skolan och på fritiden. Problemet är att det kan bli svårt att ackommodera detta schema till den svårare algebra som krävs i de högre kurserna i matematik som ges på teknikprogrammet.

6.2.4 Försöksperson 4

FP4 är flicka och går estetiskt program. Hon tycker att matematiken på gymnasiet har varit svår, men övertalades av föräldrar att välja Ma2b. Nu ångrar hon att hon valde kursen och funderar på att hoppa av och välja något annat. Hon sysslar aldrig med matematik utanför skolan. Följande tabell sammanfattar FP4s lösningar på uppgifterna:

Uppgift	**Lösningsmetod**	**Svar**	**Tid**
1	Resonemang	Rätt	220 s
2a	Figur	Rätt	
2b	Stegning, huvudräkning(Modell, ekvation med hjälp)	Fel (rätt med hjälp)	710 s
3	Prövning (ekvation med hjälp)	Fel (rätt med hjälp)	1082 s
4	Uttryck, två variabler, ekvationssystem	Fel	745 s

Redan på första uppgiften står det klart att FP4 undviker att använda algebra som problemlösningsstrategi. Hon tar tid på sig att lösa uppgiften och resonerar sig fram till svaret. De andra uppgifterna följer samma mönster. FP4 är verbal och är beroende av dialogen med mig för att komma igång med uppgifterna, även när jag bara bekräftar att hon tänker rätt. På ett sätt är FP4 lik FP3 i att använda ett alternativ till algebra, men när FP3 använder huvudräkning och logik förlitar sig FP4 på att rita och resonera.

FP4 har inte samma driv som FP2 har för att få bra betyg i Ma2b. Hon har hittills bara uppnått en begränsad operationell förståelse för algebra.

6.2.5 Försöksperson 5

FP5 är pojke och går tekniskt program. Han upplever att han alltid haft lätt för matte även om det har blivit lite svårare nu på gymnasiet. FP5 spelar ofta kortspelet *Magic: the Gathering* och använder ibland matematik för att beräkna sannolikheter i spelet. Han har också programmerat flera datorspel med ”ganska avancerad matematik”. Följande tabell sammanfattar FP5s lösningar på uppgifterna:

Uppgift	Lösningsmetod	Svar	Tid
1	Resonemang	Rätt, lite hjälp	295 s
2a	Modell, insättning	Rätt	265 s
2b	Modell, huvudräkning	Rätt	
3	Ekvation, prövning (ekvationslösning med hjälp)	Rätt, lite hjälp	950 s
4	Framresonerat uttryck, en variabel	Rätt	265 s
5	Två uttryck för area, huvudräkning	Rätt	580 s

FP5 har inga problem med att använda algebra för problemlösning och sätter gärna upp modeller och uttryck för att beskriva ett problem algebraiskt. Däremot försöker han ofta komma fram till själva lösningen utan att använda sig av ekvationslösning eller andra systematiska metoder. Han försöker hellre att tänka ut svaret med huvudräkning och logiskt tänkande. Detta kan leda till problem, t.ex. på uppgift 3 där FP5 kommer på lösningen efter ett långt matematiskt resonemang och en del hjälp. Även en enkel uppgift som nr 1 tar tid för FP5 att lösa. FP5 uttrycker att matteprov ibland går sämre än förväntat eftersom han ofta drabbas av tidsbrist.

FP5 uppvisar en god strukturell förståelse för algebra men har brister i den operationella förståelsen. Han har här utvecklat en egen räkneförmåga som han känner sig stolt över och verkar ha blivit en del av hans självbild, lite som att han anser sig vara för smart för att behöva skolmatematik. Ett schema som visat sig livsdugligt då det hjälper FP5 att definiera sig socialt, även då det riskerar att ske på bekostnad av ett sämre betyg i matematik.

6.2.6 Försöksperson 6

FP6 är pojke och går estetiskt program. Han har alltid haft mycket svårt för matematik och varit i behov av särskilt stöd både på grundskolan och gymnasiet. Han lyckades klara ett E i kursen Ma1b efter att ha kompletterat under sommaren. Han har också valt att fortsätta med Ma2b, men upplever det som svårt. FP6 håller inte på med matematik utanför skolan.

Följande tabell sammanfattar FP6s lösningar på uppgifterna:

Uppgift	Lösningsmetod	Svar	Tid
1	Ekvation	Rätt	220 s
2a	Stegning	Rätt	
2b	Modell, ekvation	Fel(rätt med hjälp)	795 s
3	Ekvation, två variabler	Fel	910 s
4	Uttryck, två variabler	Fel	1113 s

FP6 har svårt med algebraisk problemlösning och förväxlar ofta metoder från förenklingar, ekvationslösning och ekvationssystem. Lösningar med två variabler som används i Ma2b verkar röra till det ännu mer och gör att FP6 fastnar på både uppgift 3 och 4. I de flesta fall lyckas dock FP6 ställa upp korrekta ekvationer men stöter på problem vid förenkling eller tolkning av svar. På uppgift 2b ställer FP6 upp ekvationen $4x + 2 = 123$ och löser den korrekt till $x = 30{,}25$. Sedan tror han sig ha gjort fel eftersom svaret inte blir ett jämnt tal.

FP6 har precis de svårigheter med algebra som Sfard beskriver som en *vicious circle.* Eftersom FP6 är osäker på algebraiska beräkningar blir det svårt att förstå vad ett algebraiskt uttryck innebär, och eftersom han inte förstår vad det innebär blir det svårt att utföra beräkningar.

6.2.7 Försöksperson 7

FP7 är pojke och går tekniskt program. Han är mycket mån om att nå A-betyg i de flesta kurser, speciellt de tekniska som matematik, fysik och programmering. FP7 ägnar mycket tid åt att plugga matte hemma, men har sysslar inte med matematik utöver det som behövs för skolan. Följande tabell sammanfattar FP7s lösningar på uppgifterna:

Uppgift	Lösningsmetod	Svar	Tid
1	Ekvation	Rätt	110 s
2a	Stegning	Rätt	
2b	Stegning, huvudräkning	Rätt	265 s
4	Uttryck, en variabel, förenkling	Rätt	495 s
5	Två uttryck för area, ekvation	Rätt	130 s

FP7 har inga problem att lösa uppgift 1 och 5, men på uppgift 2 uttryckte han viss oro: ”*Man skall använda den här N-metoden, men den har varit min akilleshäl i matematiken.”* FP7 väljer därför att lösa uppgiften genom att stega sig fram, vilket han klarar ganska så lätt.

Uppgift 4 innebär problem även den. FP7 har svårt att få fram en formel som täcker in både juniorer och seniorer utan att använda två variabler vilket han vet måste vara fel. Först efter en del resonemang skriver han ner den korrekta formeln (5000 – X)*100 + X*60, vilket han sedan förenklar.

FP7 skiljer sig från FP3 och FP5, som också går tekniskt program och ser sig som bra på matte. FP7 ser matematiken som ett skolämne där det gäller att få bra betyg, och ställer sig inte i opposition till det som lärs ut. FP7 visar goda operationella och strukturella kunskaper i algebra, och verkar inte ha något schema som konkurrerar med skolmatematiken.

6.2.8 Försöksperson 8

FP8 är pojke och går estetiskt program. Han upplever inte matematik som svårt, men inte heller speciellt lätt. Han vill gärna få bra betyg, men pluggar hemma mest när det är prov. FP8 håller inte på med matematik utanför skolan.

Följande tabell sammanfattar FP8s lösningar på uppgifterna:

Uppgift	**Lösningsmetod**	**Svar**	**Tid**
1	Ekvation	Slarvfel	230 s
2a	Stegning	Rätt	450 s
2b	Modell, ekvation	Rätt	
3	Ekvation, två variabler, substitution	Rätt	540 s
4	Uttryck, två variabler	Fel	795 s
5	Två uttryck för area, ekvation	Fel	590 s

FP8 är den ende av försökspersonerna som svarar fel på uppgift 1, han gör ett enkelt misstag vid ekvationslösning. Även på uppgift 5 villar FP8 bort sig vid ekvationslösningen även då han ställt upp problemet på ett korrekt sätt. På uppgift 4 kommer felet då FP8 inte kan reducera ett problem med två variabler till ett problem med en variabel. Detta är misstag som kan kopplas både till bristande operationell och strukturell förståelse. En annan orsak är att FP8 läser Ma2b och försöker använda lösningar i två variabler även då det inte behövs vilket försvårar lösningarna. Detta är ett tecken på att FP8 har en starkt skolmatematisk prägel på sitt sätt att resonera.

7. Slutsats och diskussion

I resultatavsnittet analyserar jag försökspersonernas lösningar på uppgifterna både på uppgiftsnivå och på individnivå. I detta avsnitt skall jag fortsätta analysen på gruppnivå för att på detta sätt kunna återknyta till min frågeställning. Dessutom kommer jag att ge förslag på hur framtida studier kan göras för att klargöra vissa oklarheter i mina resultat.

7.1 Slutsatser

I följande tabell finns en sammanställning av de problemlösningsstrategier som de olika försökspersonerna visade under observationen:

FP	**Kön**	**Upplevd nivå**	**Upplevd arbetsinsats**	**Huvudsaklig strategi**	**Matematik utanför skolan**
1	F	Medel	Stark	Algebraisk	Nej
2	F	Svag	Stark	Algebraisk	Nej
3	P	Stark	Svag	Aritmetisk	Ja
4	F	Svag	Svag	Resonerande	Nej
5	P	Stark	Svag	Aritmetisk	Ja
6	P	Svag	Svag	Algebraisk	Nej
7	P	Stark	Stark	Algebraisk/ Aritmetisk	Nej
8	P	Medel	Medel	Algebraisk	Nej

I vilken utsträckning använder eleverna den påbjudna algebraiska metoden i en situation då de inte blir bedömda för sin lösningsmetod?

Fem av åtta försökspersoner i studien använder algebra som sin huvudsakliga problemlösningsmetod för att lösa de uppgifter studien gällde. Det finns dock en tendens i studien som kan vara värd att nämna. Två av försökspersonerna, båda pojkar på teknikprogrammet, har fritidsintressen där de använder matematik. Denna matematik skiljer sig från skolmatematiken då den är mindre formell och mer resultatinriktad. Hos de båda försökspersoner i studien som har sådana intressen har detta skapat en motvilja mot att använda algebra, då de upplever att de klarar sig bra utan. De anger också att de inte ägnar så mycket tid år matematiken som skolämne. Detta stämmer med slutsatserna i Gasco &

Villarroel (2012) där eleverna verkar välja en algebraisk lösning bara när de inte kan hitta en aritmetisk. När de når de högre kurserna i matematik kan detta att bli ett problem för dem.

Det kan vara en bra strategi att man som lärare i matematik försöker fånga upp dessa elever och ge dem algebraiska uppgifter relaterade till dessa intressen. På så sätt kan det bli lättare få med dem till högre matematik där tillämpningar kan bli svårare att hitta.

För vilken typ av uppgifter använder eleverna en algebraisk metod, och för vilken typ använder de andra metoder?

På uppgifterna 1, 3 och 5 där tanken är att eleverna skall använda ekvationsslösning som strategi, använder 70-80% av försökspersonerna algebraisk lösning. Även vid uppgift 1, som går att lösa ganska enkelt även utan ekvation, använder 75 % en ekvation. Vid uppgift 5, som innehåller svårare geometriska och algebraiska förenklingar, glömmer flera försökspersoner att sätta upp en ekvation när de väl klarat de inledande stegen.

På en enklare mönsteruppgift som uppgift 2 valde hälften av försökspersonerna att sätta upp en ekvation. Här är det troligt att ett svårare mönster skulle ha ökat denna andel, då några av de säkrare försökspersonerna insåg att stegning var en möjlig lösning.

På uppgift 4, där försökspersonerna skulle komma fram till ett algebraiskt uttryck, valde 75 % att söka en algebraisk förenkling istället för ett allmänt resonemang.

Skiljer sig eleverna val av metod beroende på om eleven upplever sig vara ”stark” eller ”svag” i matematikämnet?

Av de tre försökspersoner som aktivt försökte undvika algebraiska lösningar var det två som upplevde sig som starka. Detta var elever som använde matematik utanför skolan och hade hög tilltro till sitt logiska tänkande för att väga upp brister i algebraisk förmåga. Den tredje försökspersonen hade dåligt självförtroende för matematik i allmänhet och algebra i synnerhet. Hon använde därför resonemang för att muntligt resonera med mig och sig själv för att hitta en lösning.

Skiljer sig eleverna val av metod beroende på om eleven identifierar sig som pojke eller flicka?

Två av fem pojkar och en av tre flickor i undersökningen undviker att använda algebra. Det går naturligtvis inte att dra några statistiska slutsatser i en sådan liten undersökning. Dessutom går tre av de fem pojkarna på tekniskt program, medan alla tre flickorna går estetiskt program. Skillnader mellan pojkar och flickor i studien kan alltså i själva verkat bero på programval.

7.2 Förslag till vidare forskning

En svaghet i min studie, som jag inte insåg förrän i slutfasen av arbetet, var att använda försökspersoner från två så olika program som tekniskt och estetiskt. Eftersom elever från dessa två program ofta har vitt skilda inställningar till matematikämnet och räkning i allmänhet, blir det svårt att dra allmänna slutsatser av studien. Att använda försökspersoner från ett och samma program hade gjort det möjligt att studera t.ex. könsskillnader på ett bättre sätt.

Den i mitt tycke mest intressanta resultatet av studien var att de elever som använde sig av matematik på fritiden var mest benägna att undvika att använda algebra för problemlösning. Att närmare undersöka denna grupp och hur de tänker kring matematikämnet i allmänhet och problemlösning i synnerhet, hade varit av stort värde. Det finns stor risk att dessa elever, om de går vidare till gymnasiets mer avancerade kurser, kommer att förlora intresset för skolmatematik. Därmed går universiteten miste om studenter som har förutsättningar att bli ingenjörer eller naturvetare. Matematiklärares förmåga att fånga upp sådana elever hade kunnat underlättas med en större medvetenhet kring deras tankar och behov.

I Paulsson (2008) undersöks problemlösningsmetoder hos två klasser av elever på naturvetarprogrammet. Ett liknande upplägg, fast med mer kvalitativt fokus inriktat på de elever som undviker algebraiska lösningar, hade kunnat bli en bra ingång på en framtida studie.

8. Referenser

8.1 Litteratur

Backman, Jarl (2008). *Rapporter och uppsatser*. Lund: Studentlitteratur

Bauersfeld, Heinrich (1998). *Radikalkonstruktivism, interaktionism och matematikundervisning*. I Engström, A. (red.), Matematik och reflektion (s. 54- 81). Lund: Studentlitteratur.

Engström, Arne (red. 1998). *Matematik och reflektion*. Lund: Studentlitteratur.

Ernest, Paul (1998). *Vad är konstruktivism?* I Engström, A. (red.), Matematik och reflektion (s. 21-33). Lund: Studentlitteratur.

Gasco, Javier & Villarroel ,José Domingo (2012). *Algebraic problem solving and learning strategies in compulsory secondary education*, i Social and Behavioral Sciences 46 (s. 612 – 616). Leioa: Elsevier Ltd. Selection

Glaserfeld von, Ernst (1998). *Kognition, kunskapskonstruktion och undervisning*. I Engström, A. (red.), Matematik och reflektion (s. 34-48). Lund: Studentlitteratur.

Lundin, Sverker (2008). *Skolans matematik, En kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling*, Uppsala: Universitetstryckeriet.

Paulsson, Clara (2008). *Elevers problemlösningsstrategier – En studie av gymnasielevers val av strategier vid problemlösning*, Karlstads Universitet, http://www.diva-portal.se/smash/get/diva2:5750/FULLTEXT01.pdf

Persson, P. (2010). *Räkna med bokstäver: En longitudinell studie av vägar till en förbättrad algebraundervisning på gymnasienivå*. Luleå: Luleå tekniska universitet.

Piaget, Jean (1929). *The child's conception of the world*, London: Routledge & K. Paul

Sfard, A.(1991). *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36.

Vetenskapsrådet (2017). God forskningssed. Stockholm: Vetenskapsrådet

8.2 Källor

Deltagande observation av elev kallad Försöksperson 1 (2019). Lund: Ljud och Bildskolan

Deltagande observation av elev kallad Försöksperson 2 (2019). Lund: Ljud och Bildskolan

Deltagande observation av elev kallad Försöksperson 3 (2019). Lund: Ljud och Bildskolan

Deltagande observation av elev kallad Försöksperson 4 (2019). Lund: Ljud och Bildskolan

Deltagande observation av elev kallad Försöksperson 5 (2019). Lund: Ljud och Bildskolan

Deltagande observation av elev kallad Försöksperson 6 (2019). Lund: Ljud och Bildskolan

Deltagande observation av elev kallad Försöksperson 7 (2019). Lund: Ljud och Bildskolan

Deltagande observation av elev kallad Försöksperson 8 (2019). Lund: Ljud och Bildskolan